الفصل الثالث

التوّزعات الاحتمالية ذات الصلة

Probability Distribution

1.3) المفاهيم والمبادئ الأساسية لعلم الاحتمال وخصائصه:

1.1.3: الظواهر العشوائية ونظرية الاحتمالات:

إن علم الاحتمال هو علم دراسة الظواهر العشوائية ، إذ يمكن أن نعدّ كل ما يحيط بحياتنا اليومية ظواهر عشوائية، لأننا لا نتوقع ماذا سيحدث لنا أو معنا في لحظة معينة من كل يوم آت . فالظاهرة العشوائية تعرّف أنها ظاهرة اعتيادية تتميزّ بخاصة كون مشاهدتها المسجلة عند ظروف معيّنة لا تؤدي دائماً إلى نتيجة المشاهدة نفسها، ولكنها بطريقة ما تؤدي إلى انتظام إحصائي معين ، أي نعني بوجود أعداد من الصفر إلى الواحد، تمثل التكرار النسبي للمشاهدات، إذ إن هذا التكرار النسبي لمشاهدة حدوث حادثة معينة في الظاهرة سيقترب كما سنرى من احتمال وقوع هذه الحادثة.

وعلم الاحتمال هو علم دراسة الظواهر العشوائية فكرياً وتحليلياً في جميع مجالات ظهورها. والحساب الاحتمالي هو النظرية التي تشكل النموذج الرياضي للظواهر التي تتصف بالانتظام الإحصائي. وهناك العديد من الأمثلة على الظواهر العشوائية مثل ظاهرة حوادث السير وظاهرة سقوط المطر وظاهرة توارد مكالمات هاتفية لمركز هاتفي وظاهرة تعطل الأجهزة وظاهرة حركة الموانئ والمطارات و

تقلبات الأسعار ونمو النباتات...إلخ. و يكون الهدف من نظرية الاحتمالات هو بناء مسألة رياضية تصف وتحلل هذه الظواهر ومشاهدتها.

إن علم الاحتمال يرتكز على المفاهيم الأساسية الثلاثة الآتية: التجربة – وجبر الحوادث– و حساب الاحتمال.

2.1.3: التجربة والتجربة العشوائية:

نواجه في معظم ميادين النشاط العلمي والحياة اليومية تجارب ومشاهدات وظواهر يمكن أن تتكرر عدداً كبيراً من المرات تحت ظروف مشابهة ، وفي كل مرة نهتم بنتائج هذه التجارب والمشاهدات والتي يمكن أن تكون كمية ، فنسجل نتيجة كل مشاهدة على شكل عدد. أو قد تأخذ شكلاً كيفياً (وصفياً) فنسجل صفة معينة كأن نلحظ مثلاً لوناً أو نسجل وقوع أو عدم وقوع حادثة أو ظاهرة معينة متصلة بالتجربة.

وتعرّف التجربة بأنها كل عملية تؤدي إلى ملاحظة "مشاهدة" أو قياس.

ويهتم علم الاحتمال بالتجارب العشوائية ، حيث تعرّف التجربة العشوائية بأنها تجربة تتحكم في مشاهداتها المصادفة والتخمين . وهناك أمثلة على التجارب العشوائية منها:

- إلقاء قطع من النقود أو أحجار النرد وملاحظة النتائج الحاصلة.
- اختيار عنصر من مجموعة العناصر.
- قياس درجة الحرارة في مكان وزمان معّين عدة مرات.
- مراقبة تقلبات الأسعار ومشاهدة تواترات أسعار مادة معينة.
- توزيع مجموعة من الكرات على مجموعة من الصناديق.

- سحب ورقة أو عدة أوراق من ورق اللعب (52 ورقة).
- تواترات المكالمات الهاتفية في ساعة معينة في مركز هاتفي.
- قياس الطول والوزن لمجموعة من الأشخاص لهم العمر نفسه والجنس نفسه ، إذ نجد هنا الملاحظات على شكل زوج مرتب (X ، Y) إذ X يمثل الطول و Y يمثل الوزن.
- أخذ عينة من الإنتاج اليومي لمصنع من الألمنيوم وقياس القساوة والمقاومة ونسبة الكربون في كل قطعة فعندئذٍ النتائج ستكون على شكل ثلاثيات (X , Y , Z) على الترتيب.
- متابعة جنس المولود حديثاً في منطقة معينة فسنحصل على نتيجة وصفية ذكر أو أنثى ، وهنا يمكن أن نعطي النتيجة الرقم (1) إذا كان ذكراً والرقم (0) إذا كان المولود أنثى.
- ومن خلال الأمثلة السابقة نلحظ أن لكل تجربة مجموعة من النتائج الممكنة التي تحددها طبيعة الدراسة التي تستهدفها التجربة ، إذ سنرمز لمجموعة النتائج بـ Ω ندعوها بفضاء العينة وكل نتيجة ممكنة للتجربة سندعوها بنقطة العينة ولعدد النتائج (عدد نقاط العينة في فضاء العينة) بـ $|\square|$ وندعوها بعدة فضاء العينة Ω .
- ونعرف الحادث بأنه مجموعة جزئية من فضاء العينة إذا كانت $\square$ تمثل مجموعة منتهية. ونسمي الحادث الذي يحوي نقطة واحدة من نقاط العينة الحادث الابتدائي.

3.1.3: النماذج الأساسية في تحديد فضاء العينة Ω وعدتّه $|\Omega|$:

1.3.1.3: بالحساب المباشر:

– مثال تجربة إلقاء حجر النرد مرة واحدة يكون فضاء العينة

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ و $|\Omega| = 6$

مثال ولادة طفل: فإذا رمزنا بـ B للذكر و G للأنثى فإن $\Omega = \{B, G\}$ و $|\Omega| = 2$

مثال إلقاء قطعة نقد :فإذا رمزنا بـ T للكتابة و H للصورة فإن $\Omega = \{T, H\}$ و $|\Omega| = 2$

2.3.1.3: باعتماد طرائق العد:

1- قاعدة الـ m X n : إذا أمكن استكمال مرحلة أولى من عمل معين بـ m طريقة، ومن أجل كل من هذه الطرائق أمكن لمرحلة ثانية أن تتم بـ n طريقة، فالعدد الكلي للأشكال المختلفة لاستكمال العمل بمرحلتين هو **m X n** طريقة و يدعى ذلك أيضاً بالمبدأ الأساسي للعد.

مثال (1.3): يمكن لشخص يعمل في بلد معين أن يصل لأقاربه براً و جواً وبحراً ومن بعد يمكن أن يكمل سفره لأهله براً أو جواً . عندئذ يمكن لهذا الشخص أن يصل لأهله بعدد من الطرق المختلفة يساوي:

$$|\Omega| = m \times n = 3 \times 2 = 6$$

2– تعميم قاعدة الـ m X n : يمكن تصميم هذه القاعدة ، وذلك من أجل عمل يتضمن K من المراحل المتتالية، حيث نفرض أنه يمكن إتمام المرحلة الأولى بـ

n_1 طريقة و المرحلة الثانية n_2 طريقة ، .....، والمرحلة الـ K بـ n_k طريقة ، فيكون عدد الطرائق المختلفة لإتمام العمل بجميع مراحله هو :

$$|\Omega| = n_1 \times n_2 \times \dots\dots n_k$$

مثال (2.3): بكم طريقة يمكن تصنيف مجموعة من الأشخاص ، وذلك حسب حالتهم المدنية وعددها (3) و حسب مهنهم وعددها (20) وحسب جنسهم وعدده (2) وحسب مكان إقامتهم وعدده (8) وحسب مؤهلهم العلمي وعدده (6) .

الحل: إن عدد الطرائق المختلفة لتصنيف مجموعة هذه الأشخاص يكون:

$$|\Omega| = 3 \times 20 \times 2 \times 8 \times 6 = 5760$$

3- حالة خاصة: إذا كان لدينا تجربة مجموعة نتائجها Ω_1 وعدتها N ، وكررنا هذه التجربة n مرة وبشكل مستقل في كل مرة عن المرات الأخرى. عندئذ عدّة فضاء العينة الناتج يكون:

$$|\Omega| = |\Omega_1|^{n} = N^n$$

مثال (3.3): تجربة دراسة توزع الذكور لدى أسرة تملك ثلاثة أطفال.

لدينا هنا : $|\Omega| = 2^3 = 8$ وفضاء العينة يكون:

$$\Omega = \{BBB, BBG, BGB, GBB, GGB, GBG, BGG, GGG\}$$

<u>ملاحظة:</u> في حالة تجربة ثنائية (لها ناتجان فقط) وكررنا وبشكل مستقل هذه التجربة n مرة وبفرض Ω فضاء العينة لكل النتائج الممكنة عندئذ: $|\Omega| = 2^n$

4- **العينات المرتبة** : إذا كانت A مجموعة غير خالية من العناصر المتمايزة وكان $r \in IN^*$ فإن كل عنصر $(X_1, X_2, \dots\dots, X_r)$ من A^r يدعى في مفهوم علم الاحتمال والاحصاء بعينة مرتبة من الحجم r مأخوذة من المجموعة A ويكون عدد العينات المرتبة هذه يساوي :

- في حالة $|A| = n$ والسحب r مرة متتالية مع الإعادة (أي يعاد العنصر الذي يتم سحبه):

$$|\Omega| = |A|^r = n^r$$

في حالة $|A| = n$ والسحب r مرة متتالية ($r \leq n$) بدون إعادة (أي يحتفظ بالعنصر الذي يتم سحبه):

$$|\Omega| = n(n-1)(n-2)\dots\dots\dots(n-r+2)(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = P_r^n$$

والعناصر هنا تكون مختلفة ، وندعوه نسقاً من الحجم r مأخوذاً من A حيث :

$r \leq |A|$ و $|\Omega|$ أعلاه يكون عدد الأنساق من الحجم r والممكن تشكيلها من A.

- **المتبادلات:** يدعى ترتيب r من الأشياء المتمايزة (متبادلة). إذ نفرض أنه لدينا n شيء متمايز ونريد اختيار r شيئاً منها ($r \leq n$) تم ترتيبها في متبادلة فعندئذ يكون عدد الطرائق المختلفة للقيام بهذا الترتيب هو :

$$P_r^n = n(n-1)(n-2)\dots\dots\dots(n-r+2)(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad , (r \leq n)$$

وعندما يكون r=n أي نريد ترتيب عناصر المجموعة بأكملها فإن عدد الطرائق المختلفة لإنجاز ذلك: $P_r^n = n(n-1)(n-2)\dots\dots\dots 3.2.1 = n!$.

مثال (4.3): بكم طريقة يمكن أن نوزع n كرة على n صندوق؟

الحل:

$$|\Omega| = n^n$$

مثال(5.3):

لدينا مرجع مؤلف من ستة أجزاء نريد ترتيبه على أحد رفوف مكتبة لدينا.
ولكن لا يتوفر لنا سوى أربعة أماكن. فبكم طريقة مختلفة يمكننا شغل هذه الأماكن الأربعة المتوفرة . بأربعة أجزاء نختارها من الأجزاء الستة؟

الحل:

إن عدد الطرائق المختلفة لشغل الأماكن الأربعة هو عدد متبادلات لستة أشياء مأخوذ أربعة منها في وقت واحد أي P_4^6 ومنه :

$$P_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6X5X4X3X2!}{2!} = 360$$

- **<u>المتوافقات:</u>** إن العديد من المواقف في العد تقتضي ألا نأخذ ترتيب العناصر في الأنساق . فإذا كان لدينا مجموعة A من العناصر المتمايزة عدتها n وأردنا اختيار مجموعة جزئية مؤلفة من r عنصراً (r≤n) ، فنقول عندئذ إن ذلك يدعى بمتوافقة حجمها r مأخوذة من A ونرمز لها بـ C_r^n أو $\binom{n}{r}$. فمن أجل $r \neq 0$ يكون عدد المتوافقات من الحجم r والمأخوذة من A (التي عدتها n):

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

<u>ملاحظات :</u>

1. اصطلاحاً نضع : $0! = 1$ ، كما يكون $1! = 1$

2. بسهولة نجد : $\binom{n}{0} = 1; \binom{n}{n} = 1$

$$\binom{n}{1} = n \; ; \; \binom{n}{n-1} = n$$

مثال (6.3):

إن عدد طرائق اختيار ثلاثة كتب من 7 كتب لترتيبها على رف يكون:

$$C_r^n = C_3^7 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7X6X5X4!}{(3X2)(4!)} = 35$$

أي في هذا المثال يهمنا الكتب التي تم اختيارها ولا تهمنا طريقة الترتيب على الرف.

- نموذج أساسي مع مثال: توزيع r كرة (متمايزة أو غير متمايزة) على n صندوقاً:

إن توزيع r كرة متمايزة على n صندوقاً يعطى بـ :

$$|\Omega| = n^r = n\,Xn \ldots\ldots Xn$$

<u>ملاحظة:</u> يعود لنموذج توزيع r كرة متمايزة على n صندوقاً، العديد من التجارب العشوائية ومنها مثلاً: توزيع أيام الميلاد لمجموعة من الأشخاص عددها r على أيام السنة n=365 .

- دراسة توزيع مجموعة من حوادث السير r على أيام الأسبوع n=7.
- تصنيف مجموعة من الأشخاص r وفقاً للعمر والمهنة والجنس .
- توزيع حبيبات الضوء على خلايا الشبكية.
- توزيع الأخطاء المطبعية على صفحات كتاب معين .... إلخ.

في حالة كون الكرات غير متمايزة فإن عدد الطرق المختلفة لتوزيع r كرة غير متمايزة على n صندوقاً يعطى بالعلاقة الآتية: $|\Omega| = \binom{n+r-1}{r}$

4.1.3 <u>الجبر والجبر التام وبعض الخواص:</u>

تعريف :إذا كانت Ω مجموعة مفروضة ، وكان F صفاً غير خال من أجزاء Ω أي $F \subseteq P(\Omega)$ نقول عن F إنه جبر على Ω إذا تحققت الشروط الآتية:

1) $\Omega \in F$; **2)** $A \in F \Rightarrow \acute{A} \in F$; **3)** $A, B \in F \Rightarrow A \cup B \in F$

تعريف: إذا كان F جبراً على Ω وحقق F الشرط التالي (مغلق بالنسبة للاتحاد المعدود):

$$A_1, A_2, \dots\dots, A_n, \dots\dots \in F \Rightarrow \cup_{i\geq 1} A_i \in F$$

عندئذ نقول إن F يشكل جبراً تاماً أو $\sigma-$ جبر على Ω

نتائج :

1) إذا كان F جبراً على Ω فإن :

1 . $\emptyset \in F$.

2 . $A, B \in F \Longrightarrow A \backslash B \in F$ (مغلق بالنسبة للفرق).

3 . $A,B \in F \Longrightarrow A \triangle B \in F$ (مغلق بالنسبة للفرق التناظري).

4 . F مغلق النسبة للاتحاد المنتهي.

5 . F مغلق بالنسبة للتقاطع المنتهي.

6 . تقاطع الجبور هو جبر.

2) إذا كانت F حبراً تاماً على Ω فإنه بالإضافة للنتائج السابقة نجد أن :

1. F مغلق بالنسبة للتقاطع المعدود.

2. كل جبر تام هو جبر والعكس غير صحيح.

3. كل جبر منته هو جبر تام.

4. تقاطع الجبور التامة هو جبر تام.

3) إذا كان F صفا غير خال من أجزاء Ω ، فإنه يوجد جبر (جبر تام): $\sigma(F)$ يحوي F و محتوى في أي جبر (جبر تام) يحوي F .

<u>تعريف</u>: إن الجبر (الجبر التام) $\sigma(F)$ هو الجبر الذي يولده F (أو الجبر التام الذي يولده F) .

<u>تعريف:</u> إن الجبر التام الذي يولده صف المجالات المحدودة على R يدعى جبر بوريل ونرمز له بـ R_1 وكل مجموعة منتمية إلى R_1 تدعى مجموعة بوريلية. وبالطريقة نفسها نعرف جبر بوريل R^n و مجموعاتها البوريلية ونرمز له بـ R_n.

<u>ملاحظة :</u>

يؤدّي جبر بوريل دوراً أساسياً في نظرية الاحتمالات ؛ لأن الدراسات العددية فيها تستخدم المجالات أساساً لها.

<u>أمثلة :</u>

- $P = (\Omega)$ هو جبر وجبر تام على Ω .
- $F = \{\emptyset, \Omega\}$ هو جبر وجبر تام على Ω
- المجالات المفتوحة من R ليست جبراً ولا جبراً تاماً على **Ω**.
- إذا كانت : $\Omega = \{1,2,3,4\}$ وأخذنا الصف :

$$F = \{\emptyset, \{1\}, \{4\}, \{2,3\}, \{1,4\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$$

Ω لأنه يحقق الشروط الأربعة في التعريف هو جبر تام على F .

<u>تعريف:</u>

إذا كانت **Ω** مجموعة غير خالية و F جبراً تاماً من أجزائها فإن الثنائية **(Ω, F)** تدعى فضاءً قيوساً. وندعو كل عنصر من عناصر F مجموعة قيوسة.

<u>نتيجة:</u> إن **Ω** , Ø مجموعات قيوسة.

<u>تعريف:</u> ليكن **(Ω, F)** فضاءً قيوساً، نقول عن دالة $\mu : F \to \overline{R_+}$: إنها تمثل قياساً على F إذا حققت ما يأتي:

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) $\forall A_1, A_2 \dots\dots A_i \in \boldsymbol{F}\ ;\ \forall_{\boldsymbol{i}} \neq j : A_i \cap A_j = \Phi$:

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{A_i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

<u>تعريف:</u> ندعو الثلاثية **(Ω ، F , μ)** بفضاء القياس **μ**.

1.3. 5 جبر الأحداث:

<u>1) تعريف</u> : إذا كانت **Ω** مجموعة نتائج تجربة مفروضة وكانت **Ω** منهية أو معدودة. فإن أي مجموعة جزئية B من **Ω** تدعى حدثاً متعلقاً بهذه التجربة.

2) <u>نتيجة:</u> إن مجموعة الأحداث المتعلقة بالتجربة تكون $P(\Omega)$ وهي كما نعلم جبر تام مغلقة جبرياً بالنسبة للعمليات المنطقية المنتهية أو المعدودة.

3) <u>حالة عامة:</u> إذا كانت **Ω** غير منتهية وغير معدودة فإننا تقبل الأحداث المتعلقة بالتجربة تشكل جبراً تاماً على **Ω** ونرمز له بـ F ، ونسميه جبر الأحداث، وليس من الضروري أن يساوي $P(\Omega)$.

4) <u>مسلمات احتمالية:</u> من أجل **Ω** مجموعة نتائج تجربة عشوائية فإن قولنا A حدث متعلق بالتجربة **Ω** يكافئ قولنا إن $A \in F$ حيث F جبر الأحداث على **Ω**.

وكذلك من أجل $A \in F$ يكون لدينا : ($\omega \in A$ ⇐ الحدث A قد وقع) وقولنا ($\omega \notin A$ ⇐ الحدث A لم يقع).

ونذكر بأن المجموعات الجزئية الأحادية من **Ω** هي أحداث ، وتدعى بالأحداث الابتدائية.

5) <u>نتيجة:</u> إن تطبيق العمليات المنطقية على جبر الأحداث يعطي أحداثا؛ لأن جبر الأحداث هو جبر تام ، والجبر التام مغلق بالنسبة للعمليات المنطقية.

6) <u>بعض الحوادث الشهيرة: ليكن لدينا الفضاء المقيس (Ω,F) .</u>

<u>الأحداث الشهيرة هي:</u>

- **الحدث الأكيد:** وهو **Ω**.

- **الحدث المستحيل:** وهو **Ø**.

- **اتحاد الأحداث:** من أجل أي حدثين A,B من F فإن $A \cup B \in F$ (لأن F جبر تام) و $A \cup B$.

عندئذ هو حدث يقع إذا وقع أحد الحدثين A أو B على الأقل.

ومن أجل متتالية معدودة من الأحداث $A_1, A_2 \ldots\ldots A_n$ من F فإن :

$\bigcup_{i\geq 1} A_i \in F$ (لأن F جبر تام) ومنه $\bigcup_{i\geq 1} A_i$ هو حدث يقع إذا وقع أحد الأحداث A_i , $i \geq 1$ على الأقل.

- **تقاطع الأحداث:** من أجل A,B من F فإن $A \cap B \in F$ (لأن F جبر فهو مغلق بالنسبة للتقاطع المنتهي) ، ومنه $A \cap B$ هو حدث يقع إذا وقع A و B معاً وبآن واحد .

وكذلك من أجل متتالية معدودة من الأحداث $(A_i)_{i\geq 1}$ فإن

$\bigcap_{i\geq 1} A_i \in F$ (لأن كل جبر تام فهو مغلق بالنسبة للتقاطع المعدود) . ومِنْ ثَمَّ $\bigcap_{i\geq 1} A_i$ هو حدث يقع إذا وقعت الأحداث $(A_i)_{i\geq 1}$ معاً بآن واحد .

- **الأحداث المتنافية:** نقول عن الحدثين A,B من F : إنهما متنافيان إذا كان $A \cap B = \emptyset$ (أي لا يمكن وقوعهما بآن واحد).

- **<u>نتيجة:</u>** من أجل متتالية من الأحداث من F والمتنافية مثنى مثنى $(A_i)_{i\geq 1}$ أي:

$$\forall_{i,j} : i \neq j : \ A_i \cap A_i = \Phi \ ; i; j = 1, 2, \ldots..$$
$$|\bigcup_{i\geq 1} A_i| = |\boldsymbol{A_1}| + |\boldsymbol{A_2}| + \ldots\ldots\ldots + |\boldsymbol{A_n}| + \cdots..$$

- **فرق حدثين** : من أجل A,B من F فإن $A\text{-}B \in F$ (لأن F جبر) ومِنْ ثَمَّ A-B هو حدث يقع إذا وقع A ولم يقع B أي إن $A\text{-}B = A \cap \acute{B}$.

- **الأحداث المتعاكسة:** من أجل A من F فإن $\grave{A} \in F$ حيث $\grave{A}$ يدعى بالحدث المعاكس لـ A أو الحدث المتمم لـ A بالنسبة لـ $\boldsymbol{\Omega}$ و $\grave{A}$ يقع إذا لم يقع A ومنه $A \cap \acute{A} = \emptyset$ أي أن A ، $\acute{A}$ حدثان متنافيان .

- **الاحتواء:** من أجل A,B من F و $A \subseteq B$ فهذا يعني أنه إذا وقع A يقع B، ولكن العكس ليس من الضروري أن يكون صحيحاً.

- **نتائج:**

1. الحدث المستحيل **Ø** في أي تجربة يتنافى مع كل حدث آخر.
2. الأحداث الابتدائية في تجربة هي أحداث نافية لبعضها بعضاً لدى اختلافها.

مبرهنة (1.3):(بدون إثبات):

كل حدث من جبر الأحداث مؤلف من عدد منته من العناصر يمكن وضعه بشكل وحيد كاتحاد لأحداث الابتدائية.

مبرهنة (2.3): (بدون إثبات):

عدد الحوادث من جبر أحداث منته هو دوماً من شكل قوى للعدد 2.

6.1.3 : التعاريف الأساسية للاحتمال

1.6.1.3 التعريف التقليدي للاحتمال:

إذا كنا حيال تجربة مجموعة نتائجها منتهية أي إن :

Ω = $\{w_1, w_2 \ldots, w_n\}$ ، فيكون عندئذ $F = P(\Omega)$ هو جبر الأحداث، وإذا كنا لا نملك أي مسوّغ لترجيح وقوع حدث ابتدائي على وقوع حدث ابتدائي آخر فإننا نعرف $P(A)$ حيث $(A \in F)$ باحتمال وقوع الحدث A وبالشكل الآتي:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{عدد عناصر } \boldsymbol{A}}{\text{عدد عناصر } \Omega}$$

فمن أجل $|A| = K$ **حيث:** $K \leq n$ **نجد أن :** $P(A) = \frac{K}{n}$

2.6.1.3 التعريف الإحصائي للاحتمال :

لتكن **Ω** فضاء عينة لتجربة عشوائية ، ولنفترض أننا كررنا هذه التجربة n مرة (حيث n كبيرة كبراً كافياً). وليكن A حدثاً متعلقاً بهذه التجربة ، وكان n(A) عدد المرات التي يقع بها الحدث A ، وليكن $V_{\mathrm{n}}(\mathrm{A}) = \frac{n(A)}{n}$ يمثل التكرار النسبي لوقوع الحدث A . فإن المتتالية $V_1(\mathrm{A}), V_2(\mathrm{A}) \ldots V_{\mathrm{n}}(\mathrm{A})$ تخضع لنوع من الانتظام الإحصائي إذ إنه من أجل **n** كبيرة كبراً كافياً ، ستتراكم التكرارات النسبية $V_{\mathrm{n}}(\mathrm{A})$ حول عدد ثابت سندعوه تقريباً باحتمال وقوع الحادثة A أي $P(A) \approx V_{\mathrm{n}}(\mathrm{A})$.

3.6.1.3 التعريف الرياضي للاحتمال (تعريف كولموغوروف):

لتكن **Ω** تمثل مجموعة نتائج تجربة عشوائية و F جبر الأحداث المعرف عليها ولتعرف الدالة:

$P: F \rightarrow R$ كما يأتي:

1. $\forall\ A \in F:\ P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. من أجل متتالية معدودة من الحوادث المتنافية مثنى مثنى من F :
$A_1, A_2 \ldots, A_n \ldots$ يكون: $P[\cup_{n\geq 1} A_n] = \sum_{n\geq 1} P(A_n)$

عندئذ ندعو P بأنه دالة احتمالية أو احتمال بشكل مختزل ، ويكون P(A) هو احتمال وقوع الحادث A من F في Ω . وهذا التعريف يدعى بتعريف كولموغوروف للاحتمال.

تعريف:

ندعو الثلاثية (Ω, F, P) بالفضاء الاحتمالي إذ Ω تمثل فضاء العينة و F جبر الأحداث على Ω و P قياس احتمال معرف حسب كولموغوروف.

وندعو هذا الفضاء بالفضاء الاحتمالي المنفصل، إذا كانت مجموعة الأحداث الابتدائية للتجربة فيه منتهية أو معدودة. ويكون فضاء مستمراً إذا كانت مجموعة الأحداث الابتدائية في فضاء العينة غير منتهية وغير معدودة.

4.6.1.3 أمثلة محلولة:

مثال (7.3) : يتسابق في الجري ثلاثة أشخاص A, B, C فإذا كان احتمال فوز C هو ضعف احتمال فوز(A) ، واحتمال فوز A هو ثلاثة أضعاف احتمال فوز B. والمطلوب: عين احتمال فوز كل منهم ، ثم عين احتمال فوز B أو C علماً بأن هناك فائزاً واحداً فقط.

الحل: ليكن احتمال فوز B يمثل K فاحتمال فوز A هو 3K واحتمال فوز C هو 2(3K) ، أي 6K وبما أن A, B, C تشكل تجزئة لـ Ω فإن:

$$P(A) + P(B) + P(C) = P(\Omega) \Rightarrow 3K + K + 6K = 1 \Rightarrow 10K = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{10}$$

ومنه: $P(A) = 3k = \frac{3}{10}; P(B) = K = \frac{1}{10}; P(C) = 6K = \frac{6}{10}$

ويكون احتمال فوز B أو C أي:

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{1}{10} + \frac{6}{10} = \frac{7}{10}$$

(لأن B, C متنافيان لأنَّ لدينا فائزاً واحداً).

مثال (8.3):

لدينا 5 بذور، اثنتان منها تنتجان زهوراً حمراء ، نرمز لها بـ R_1, R_2 واثنتان منها تنتجان زهوراً بيضاء ، ونرمز لها بـ W_1, W_2 ، وواحدة منها تنتج زهوراً صفراء، ونرمز لها بـ y. خلطنا هذه البذور جيداً واخترنا منها عشوائياً بذرتين. فما احتمال أن تنتجا زهوراً من اللون نفسه ، وما احتمال أنْ تنتجا زهوراً من لونين مختلفين.

الحل:

يمكننا تمثيل نتائج هذه التجربة بالشكل الآتي:

	R_1	R_2	W_1	W_2	Y
R_1	_	$R_1 R_2$	$R_1 W_1$	$R_1 W_2$	R_1 Y
R_2	$R_2 R_1$	_	$R_2 W_1$	$R_2 W_2$	R_2 Y
W_1	$W_1 R_1$	$W_1 R_2$	_	$W_1 W_2$	W_1 Y
W_2	$W_2 R_1$	$W_2 R_2$	$W_2 W_1$	_	W_2 Y
Y	Y R_1	Y R_2	Y W_1	Y W_2	_

يلحظ أن مقدار فضاء العينة (مجموعة نتائج التجربة) $|\Omega| = 20$

وليكن A حادثة الحصول على زهور من اللون نفسه

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{20} = 0.2$$

وليكن B حادثة الحصول على زهور من لونين مختلفين

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{16}{20} = 0.8$$

أو $P(B) = 1 - P(A) = 1 - 0.2 = 0.8$.

7.1.3 الخصائص الرئيسية العامة للاحتمال:

1. خصائص مباشرة: ليكن (Ω, F, P) فضاء احتمالياً، ولنفرض أن جميع المجموعات الواردة هي أحداث (عناصر من F):

من أجل أي $A, B \in F$ ، $A \cup \acute{A} = \Omega$ لدينا:

$B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup \acute{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \acute{A})$ (وهما حدثان متنافيان عندئذ):

خاصة (1):

$$\Rightarrow P(B) = P(A \cap B) + P(\acute{A} \cap B)$$

وبالمثل من أجل $B \cup \acute{B} = \Omega$

خاصة (2): $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \acute{B})$

وبوضع $B = \Omega$ في الخاصة (1) نجد:

$$P(\Omega) = P(A \cap \Omega) + P(\acute{A} \cap \Omega) \Rightarrow 1 = P(A) + P(\acute{A})$$

خاصة (3) :

$$\Rightarrow \quad P(A) + P(\acute{A}) = 1 \; ; \; P(A) = 1 - P(\acute{A})$$

وفي الخاصة (3) بوضع $A = \emptyset$ نجد:

خاصة(4):

$$P(\emptyset) + P(\Omega) = 1 \Rightarrow \quad P(\emptyset) + 1 = 1 \Rightarrow \quad P(\emptyset) = 0$$

وإذا كان $A \subseteq B$ فإن الخاصة (1) تصبح من الشكل:

خاصة (5):

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\acute{A} \cap B) = P(A) + P(B \backslash A) \Rightarrow$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

خاصة (6): $P(B) \geq P(A)$

ومن أجل أي $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$ وحسب الخاصة (6) نجد:

خاصة (7):

$$P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega) \Rightarrow \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

ومن أجل متتالية معدودة من الحوادث $A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots, A_n \ldots\ldots$ من F وحسب دومرغان:

$$(\cup_{i\geq} A_i)' = \cap_{i\geq 1} \acute{A}_i$$

نجد من الخاصة (3):

خاصة (8) :

$$\boxed{P(\cup_{i\geq 1} A_i) = 1 - P\left(\cap_{i\geq 1} \acute{A}_i\right)}$$

$$P(\cup_{i\geq 1} A_i) = 1 - P(\cup_{i\geq 1} A_i)' \Rightarrow$$

ومن أجل أي حادثتين A, B من F وكان $A \cap B \neq \emptyset$ (غير متنافيتين) وكون:

$$A \cup B = A \cup [B \backslash (A \cap B)] \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P[B \backslash (A \cap B)]$$

وكون $A \cap B \subseteq B$ فحسب الخاصة (5) نجد:

خاصة (9) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

مثال (9.3):

قذفنا ثلاثة أحجار نرد، وبمعرفة أنه لا يمكن لحجرين أن يعطيا القيمة العددية نفسها، عين احتمال الحصول على الوجه واحد.

الحل:

لتكن A حادثة الحصول على الوجه واحد.

فتكون 'A حادثة عدم الحصول على الوجه واحد من أي حجر.

$|\Omega|=6\times5\times4=120$; $|A| =5\times4\times3=60$

$$P(A) = 1 - P(\acute{A}) = 1 - \frac{60}{120} = 0.5$$

مثال (10.3):

يرغب طالب في دراسة الطب، فبعد أن رفض طلبه في جميع الكليات في بلده، لجأ للمراسلة مع دول خارجية ، وذلك بمساعدة مؤسستين للمراسلة، بقصد تحصيل قبول في إحدى الدول عن طريقها ، وهي y, x فإذا كان احتمال أن يحصل على قبول عن طريق x هو (0.7)، واحتمال أن يحصل على قبول عن طريق y هو (0.4)، وبشك 75% من أن إحدى المؤسستين سوف لا تحصل له قبولا. عين احتمال حصوله على قبول من إحدى المؤسستين.

الحل:

لتكن الحادثة A حادثة حصول الطالب على قبول عن طريق المؤسسة x

ولتكن الحادثة B حادثة حصول الطالب على قبول عن طريق المؤسسة y.

ولدينا : P(A)=0.7 ، P(B)=0.4 ، $P(\acute{A} \cup \acute{B}) = 0.75$

والحادث المطلوب $A \cup B$ حيث A, B غير متنافيين، فعندئذ:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - [1 - P(A \cap B)']$$

$$= P(A) + P(B) - 1 + P(A' \cup B')$$

$$= 0.7 + 0.4 - 1 + 0.75 \quad = 0.85$$

- **تعميم حساب احتمال اتحاد عدة حوادث:**

من أجل ثلاث حوادث A_1, A_2, A_3 غير متنافية من F يكون:

$$P[A_1 \cup A_2 \cup A_3] = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2)$$
$$-P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

مثال (11.3):

مؤسسة تجارية تستخدم عمالاً من المدينة ومن خارجها. فإذا كان 60% من العمال إناثاً و 30% من العمال من المدينة، وواحد من العمال من كل أربعة عمال هو من الذكور ومن المدينة. عين نسبة الإناث العاملات من خارج المدينة في هذه المؤسسة.

الحل :

ليكن F حادثة كون العمال الإناث ، فيكون $P(F) = 0.60$.

وليكن M حادثة كون العمال من الذكور، فيكون

$P(M) = 1 - P(F) = 0.40$.

وليكن C حادثة كون العمال من المدينة، فيكون $P(C) = 0.30$.

وليكن B حادثة كون العمال من خارج المدينة، فيكون

$P(B) = 1 - P(C) = 0.70$.

كون $\acute{C} = B$

ولدينا $P(M \cap C) = 0.25$ والمطلوب حساب $P(F \cap B)$ ؟

$$P(F) = P(F \cap C) + P(F \cap B) \Rightarrow$$

$$P(F \cap B) = P(F) - P(F \cap C)$$

$$= P(F) - [P(C) - P(M \cap C)]$$

$$= P(F) - P(C) + P(M \cap C)$$

$$= 0.60 - 0.30 + 0.25 = 0.55$$

2.3)الاحتمال الشرطي والاستقلال العشوائي

1.2.3: مقدمة وتعريف:

إذا نظرنا إلى السماء في يوم من الأيام ووجدناها ملبدة بالغيوم، فهذا يعني أن احتمال هطول المطر أقوى مما لو وجدناها خالية من الغيوم. فإذا رمزنا لحادثة هطول المطر بـ A وحادثة كون السماء ملبدة بالغيوم بـ B فإننا نرمز لـ

$P(A/B)$ باحتمال A علماً بأن B قد وقعت أي احتمال هطول المطر علماً بأن السماء ملبدة بالغيوم ومِنْ ثَمَّ سيكون $P(A/B)$ أكبر من $P(A)$ وهو أكبر أيضاً من $P(A/B')$. وهذا المثال يوضح بأن هناك حوادث قد تكون على صلة بعضها ببعض، أي وقوع حادثة قد يؤثر زيادةً أو نقصاناً في احتمال وقوع حادثة أخرى ، ومن هنا تأتي أهمية الاحتمال الشرطي.

ولو وجدنا أن وقوع حادثة B لا يؤثر بزيادة أو نقصان في احتمال وقوع A أي: $P(A/B') = P(A)$، نستنتج بلا شك أن لا صلة للحادثتين بعضها ببعض من الناحية الاحتمالية، أو أنهما مستقلان احتمالياً.

ومِنْ ثَمَّ إذا كان لدينا (Ω, F, P) فضاءً احتمالياً ، وكان A, B حدثين من F ، وإذا علمنا أن $P(B) > 0$ فإننا نعرّف الاحتمال الشرطي لوقوع A علماً بأن B قد وقع بـ :

إذ نرمز أيضاً بـ $\left(P_B(A) = P(A/B)\right)$ ؛

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \;\; ; \; P(B) > 0$$

وبالمثل:

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad ; \quad P(A) > 0 \quad ; \quad \left(P_A(B) = P(B/A)\right)$$ حيث:

نتائج:

1) إذا كان (Ω, F, P) فضاءً احتمالياً، فإنه بمعرفتنا بوقوع الحدث A يعني أننا سنتعامل مع الفضاء الاحتمالي الشرطي (Ω, F, P_A) .

2) P_A هو احتمال فعلي (يحقق التعريف الرياضي للاحتمال) ، فهذا يعني أن كل الخواص التي رأيناها في الجزء الأول للاحتمال صالحة في حالة الاحتمال الشرطي.

2.2.3: <u>قاعدة الاحتمال المركب:</u>

من تعريف الاحتمال الشرطي رأينا أن :

$$P_A(B) = P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \;\; ; \;\; P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \; P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = P(B).P(A/B)$$

وهذه تدعى بقاعدة الاحتمال المركب.

ويمكننا ببساطة تعميم هذه القاعدة من $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ متتالية من الأحداث:

$$P(\cap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1).P(A_2/A_1).P(A_3/A_1 \cap A_2)....P\left((A_n | \cap_{i=1}^{n-1} A_i)\right)$$

مثال (12.3):

تم تصنيف 100 شخص حسب الجنس (ذكر أم أنثى) ووفقاً للإصابة بمرض معين (مصاب أو غير مصاب) وكانت النتيجة كالآتي:

	مصاب	غير مصاب	المجموع
ذكر	10	30	40
أنثى	15	45	60
المجموع	25	75	100

اختير عشوائياً شخصٌ من مجموعة الأشخاص والمطلوب :

1. احسب احتمال أن يكون الشخص مصاباً علماً بأنه كان ذكراً.
2. احسب احتمال أن يكون ذكراً علماً بأنه كان مصاباً بالمرض.

الحل:

ليكن A حادثة كون الشخص مصاباً بالمرض.

و B حادثة كون الشخص ذكراً.

1. الحادث المطلوب

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{10}{40} = 0.25$$

2. الحادث المطلوب

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{|A\cap B|}{|A|} = \frac{10}{25} = 0.40$$

مثال(13.3):

رجل وزوجته بلغا من العمر نحو السبعين عاماً، وبلغ بهما المرض أشده، فإذا كان احتمال وفاة الرجل خلال عام هو 0.30 واحتمال وفاة المرأة خلال العام نفسه هو 0.45. فإذا حصل وفاة خلال العام، فما احتمال أن يكون المتوفى هو الرجل؟ وما احتمال أن يكون المتوفَّى هو المرأة؟

الحل:

لتكن A حادثة وفاة الرجل خلال العام.

و B حادثة وفاة المرأة خلال العام.

و C حادثة وفاة خلال العام.

(1

$$P(A/C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{P(A)}{P(A\cup B)}$$

$$= \frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(A\cap B)} = \frac{0.30}{0.30+0.45} = \frac{0.30}{0.75} = 0.4$$

(2

$$P(B/C) = \frac{P(B\cap C)}{P(C)} = \frac{P(B)}{P(C)} = \frac{0.45}{0.75} = 0.6$$

3.2.3 تعريف التجزئة:

ليكن (Ω, F, P) فضاءً احتمالياً، ولتكن $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية من الحوادث كلها من F. نقول عن $(A_i)_{i\geq 1}$ إنها تشكل تجزئة للحدث الأكيد Ω إذا حققت الشروط الآتية:

1) $\Omega = \bigcup_{i\geq 1} A_i$

2) $\forall_{i,j} \geq 1 \quad ; \quad i \neq j \quad : \quad A_i \cap A_j = \emptyset$

1.3.2.3 نتائج:

1) إذا كانت الأحداث $(A_i)_{i\geq 1}$ تشكل تجزئة للحدث الأكيد Ω ، فعندئذٍ (كون $(A_i)_{i\geq 1}$ متنافية مثنى مثنى)
$P(\Omega) = P(\bigcup_{i\geq 1} A_i) = \sum_{i\geq 1} P(A_i) = 1$ وهذه تدعى بقاعدة الاحتمال الكلي.

2) إن أي تجزئة للحدث الأكيد Ω تؤدي إلى تجزئة لأي حدث متعلق بالتجزئة نفسها. فإذا كانت الأحداث $(A_i)_{i\geq 1}$ تجزئة لـ Ω وكان B حدثاً متعلقاً بها فإن:

$$B = B \cap \Omega = B \cap (\bigcup_{i\geq 1} A_i) = \bigcup_{i\geq 1}(B \cap A_i)$$

وكون $(A_i)_{i\geq 1}$ متنافية مثنى مثنى فإن الأجزاء منها $(B \cap A_i)_{i\geq 1}$ تكون متنافية مثنى مثنى أيضاً ومنه:

$$P(B) = P[\bigcup_{i\geq 1}(B \cap A_i)] = \sum_{i\geq 1} P(B \cap A_i)$$

ومِنْ ثَمَّ $(B \cap A_i)_{i\geq 1}$ تشكل تجزئة للحادث B المرتبط ب Ω.

2.3.2.3 دستور بايز:

لتكن $(A_i)_{i\geq 1}$ تجزئة ل Ω في الفضاء الاحتمالي (Ω, F, P) وليكن B حادثاً مرتبطاً بهذه التجربة. فإن دستور بايز ينص على:

$$P\left({}^{A_i}/_{B}\right) = \frac{P(A_i).P\left({}^{B}/_{A_i}\right)}{\sum_{i\geq 1} P(A_i).P\left({}^{B}/_{A_i}\right)} \quad \forall\, i = 1,2,3,\ldots$$

إن هذا الدستور يدعى بدستور بايز أو احتمال السبب ، أي إنه إذا وقع الحادث B فما هو احتمال أن يكون الجزء (A_i) (من التجزئة $(A_i)_{i\geq 1}$) هو السبب في وقوعه، ومِنْ ثَمَّ الأحداث $(A_i)_{i\geq 1}$ تؤدِّي دور العوامل المسببة لوقوع الحدث B وغيره من الأحداث المرتبطة بالتجزئة نفسها.

الإثبات من: (3.2.3) رأينا أن:(حسب قاعدة الاحتمال المركب)

$$P(B) = \sum_{i\geq 1} P(A_i \cap B) = \sum_{i\geq 1} P(A_i).\, P\left({}^{B}/_{A_i}\right)$$

ومن تعريف الاحتمال الشرطي نجد:

$$P\left({}^{A_i}/_{B}\right) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i).P\left({}^{B}/_{A_i}\right)}{\sum_{i\geq 1} P(A_i).P\left({}^{B}/_{A_i}\right)}$$

i =1,2,.....

مثال(14.3):

لدى شخص 500 جهاز إرسال تحوي 10 عاطلة عن العمل، بدأ يفحص الأجهزة، جهازاً فجهازاً، عين احتمال أن يجد الشخص ثلاثة أجهزة صالحة للعمل ثم يليها جهاز عاطل عن العمل.

الحل:

لتكن E_i حادثة الحصول على جهاز عاطل عن العمل

$i = 1, 2, 3, 4$ والحاث المطلوب $\acute{E}_1 \cap \acute{E}_2 \cap \acute{E}_3 \cap E_4$ فحسب قاعدة الاحتمال المركب:

$$P(\acute{E}_1 \cap \acute{E}_2 \cap \acute{E}_3 \cap E_4) = P(\acute{E}_1).P\left(\acute{E}_2/\acute{E}_1\right).P\left(\acute{E}_3/\acute{E}_1 \cap \acute{E}_2\right).P\left(E_4/\acute{E}_1 \cap \acute{E}_2 \cap \acute{E}_3\right)$$

$$= \frac{490}{500} \times \frac{489}{499} \times \frac{488}{498} \times \frac{10}{497} = 0.019$$

مثال(15.3):

مصنع للأدوية فيه ثلاثة خطوط إنتاج ؛ إذ إنَّ الخط الأول A_1 يسهم بـ 30% من إنتاج المصنع ومن ضمن إنتاجه 1% معيب الصنع، والخط الثاني A_2 يسهم بـ 36% من إنتاج المصنع ومن ضمن إنتاجه 2% معيب الصنع، والخط الثالث A_3 يسهم بـ 34% من إنتاج المصنع ومن ضمن إنتاجه 2% معيب الصنع. تم اختيار عبوة من إنتاج المصنع عشوائياً.

والمطلوب:

1. احسب احتمال أن تكون العبوة المختارة معيبة الصنع.

2. إذا كانت العبوة المختارة معيبة الصنع فما احتمال أن تكون من إنتاج الخط الثالث؟

الحل:

ليكن B حادثة كون العبوة المختارة معيبة الصنع.

ويمكننا وصف التجربة بالمخطط الآتي:

الخط	A_1	A_2	A_3
مساهمة الإنتاج	$P(A_1)=0.30$	$P(A_2)=0.36$	$P(A_3)=0.34$
إذا كان B حادثة كون العبوة المختارة معيبة الصنع.			
نسبة معيبة الصنع	$P\left(B/A_1\right)=0.01$	$P\left(B/A_2\right)=0.02$	$P\left(B/A_3\right)=0.02$

يلحظ أن A_1, A_2, A_3 تشكل تجزئة ل Ω (فضاء العينة) لأنه

$$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=0.30+0.36+0.34=1$$

1) الحادث المطلوب $P(B)$:

$$P(B)=P(A_1).P\left(B/A_1\right)+P(A_2).P\left(B/A_2\right)+P(A_3).P\left(B/A_3\right)$$

$$=(0.30).(0.01)+(0.36).(0.02)+(0.34).(0.02)=0.017$$

2) هنا لدينا قانون بايز (احتمال السبب)

أي إذا وقع B فما هو احتمال أن يكون الخط الثالث هو السبب في وقوعه.

$$P\left({A_3}/{B}\right) = \frac{P(A_3).P\left({B}/{A_3}\right)}{P(B)} = \frac{(0.34).(0.02)}{0.017} = \frac{0.0068}{0.017} = 0.40$$

مثال(17.3):

في مجتمع من البالغين تبلغ نسبة الإصابة بمرض السكري 0.08 ، واحتمال أن يقرر طبيب معين إصابة شخص بهذا المرض، علماً أنه مريض بالفعل هو 0.95 واحتمال أن يقرر إصابته علماً أنه غير مصاب هو 0.02 ، ما احتمال أن يكون شخص بالغ مريضاً بالسكري علماً بأن الطبيب أبلغه ذلك؟

الحل:

هنا نتعرف أولاً حوادث التجزئة ، أي الأسباب وهي الإصابة أو عدم الإصابة بمرض السكري ولدينا هنا

$$\mathrm{P(B)} = 0.08 \;\; ; \;\; \mathrm{P}\left(\acute{\mathrm{B}}\right) = 1 - \mathrm{P(B)} = 0.92$$

وليكن الحادث A أن الطبيب شخص الإصابة بالمرض، عندئذٍ لدينا من فرضيات الدراسة:

$$\mathrm{P}\left({\mathrm{A}}/{\mathrm{B}}\right) = 0.95 \; ; \;\; \mathrm{P}\left({\mathrm{A}}/{\acute{\mathrm{B}}}\right) = 0.02$$

والحادث المطلوب: ${B}/{A}$ (حالة قانون بايز)

$$\mathrm{P}\left({\mathrm{B}}/{\mathrm{A}}\right) = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(A)}} = \frac{\mathrm{P(B).P}\left({\mathrm{A}}/{\mathrm{B}}\right)}{\mathrm{P(B).P}\left({\mathrm{A}}/{\mathrm{B}}\right) + \mathrm{P}\left(\acute{\mathrm{B}}\right).\mathrm{P}\left({\mathrm{A}}/{\acute{\mathrm{B}}}\right)}$$

$$= \frac{(0.08).(0.95)}{(0.08).(0.95)+(0.92).(0.02)} = \frac{0.076}{0.0944} = 0.81$$

3.3 تعريف الاستقلال العشوائي:

ليكن (Ω, F, P) فضاء احتمالياً:

1) لتكن A, B من F، نقول إن الحادثين A, B أنهما مستقلان عشوائياً إذا كانا يحققان الشرط الآتي: $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

2) إذا الأحداث A_1, A_2, A_3 من F. فإننا نقول عن هذه الأحداث مستقلة عشوائياً إذا كانت تحقق الشرطين الآتيين:

1- الأحداث A_1, A_2, A_3 مستقلة مثنى مثنى.

2- $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P(A_2).P(A_3)$

3) نقول عن متتالية من الأحداث $A_1, A_2 ..... A_n$ من F إنها مستقلة عشوائياً إذا كانت تحقق الشرطين الآتيين:

1- كل متتالية جزئية منها من المرتبة (n-1) تكون مستقلة عشوائياً.

2- $P(\cap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$

1.3.3 نتائج:

1) من تعريف الاستقلال ينتج أن: $P(A/B) = P(A) \quad ; \quad P(B/A) = P(B)$
أي إن استقلال حادثين يعني أنه إذا وقع أحدهما فليس له أي علاقة بوقوع أو عدم وقوع الآخر. ويمكن تعميم ذلك.

2) إذا كان $A \cap B = \emptyset$ (حدثان متنافيان)، فلكي يكونا مستقلين يجب أن يتحقق:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) \Rightarrow P(A).P(B) = 0 \Rightarrow P(A) = 0 \text{ V } P(B) = 0$$

أي يجب أن يكون أحدهما على الأقل حادثاً مستحيلاً.

مثال (18.3): في دراسة لمرضى الرئة، أجري فحص لمجموعة مؤلفة من 10000 شخص أعمارهم فوق ال 60 عاماً، ومن بينهم يوجد 3300 شخص لديهم اختلاطات رئوية، ولقد وجد من المجموعة 4000 شخص من مدمني التدخين، ومن بين المدخنين يوجد 1800 شخص لديهم اختلاطات رئوية، والمطلوب: هل التدخين والاختلاطات الرئوية حادثتان مستقلتان؟

الحل:

لتكن A حادثة اختيار شخص عشوائياً وكان مدمناً التدخين.

ولتكن B حادثة اختيار شخص عشوائياً وكان لديه اختلاطات رئوية، عندئذٍ:

$$P(A) = \frac{4000}{10000} = 0.4$$

$$P(B) = \frac{3300}{10000} = 0.33$$

$$P(A \cap B) = \frac{1800}{10000} = 0.18$$

$$P(A).P(B) = (0.4).(0.33) = 0.132 \neq 0.18 = P(A \cap B)$$

وبالتالي A و B غير مستقلّين عشوائياً.

أي التدخين والاختلاطات الرئوية حادثتان غير مستقلتين.

2.3.3 خواص الاستقلال العشوائي:

ليكن (Ω, F, P) فضاء احتمالياً.

1- الأحداث المستقلة عن نفسها هي الأحداث شبه المستحيلة والأحداث شبه الأكيدة فقط.

2- إن Ω, $\emptyset$ حادثان مستقلان عن أي حدث A من F حيث $1 > P(A) > 0$.

3- إذا كانت الأحداث A, B من F مستقلة عشوائياً فإن A, B' تكون مستقلة عشوائياً و A', B مستقلة عشوائياً و B' ، A' تكون مستقلة عشوائياً.

4- إذا كانت الأحداث $A_1, A_2, \dots . A_n$ من F مستقلة عشوائياً فإن الحوادث المتممة لها $\acute{A}_1, \acute{A}_2, \dots . \acute{A}_n$ تكون مستقلة عشوائياً أيضاً.

5- من أجل A, B حدثين من F ويحققان الشرط الآتي:
$P\left({}^{B}/_{\acute{A}}\right) = P\left({}^{B}/_{A}\right)$ عندئذٍ يكون A, B مستقلين عشوائياً.

6- إذا كانت الأحداث $A_1, A_2, \dots . A_n$ مستقلة عشوائياً فعندئذٍ لحساب $P(\cup_{i=1}^{n} A_i)$ يصبح هذا سهلاً إذا استفدنا من الخاصة (4) حيث:

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - P\left(\cap_{i=1}^{n} \acute{A}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P\left(\acute{A}_i\right)$$

مثال(19.3):

إذا كان احتمال أن يعيش رجل 10 سنوات أخرى هو $\frac{1}{4}$ ، واحتمال أن تعيش زوجته 10 سنوات أخرى هو $\frac{1}{3}$ ، والمطلوب:

1) احسب احتمال أن يعيش الاثنان 10 سنوات أخرى.

2) احسب احتمال أن يعيش أحدهما على الأقل 10 سنوات أخرى.

3) احسب احتمال أن يتوفى الاثنان خلال ال 10 سنوات الأخرى.

4) احسب احتمال أن تعيش الزوجة فقط 10 سنوات أخرى.

الحل:

ليكن A حادث أن يعيش الزوج 10سنوات أخرى.

و B حادث أن تعيش الزوجة 10 سنوات أخرى.

1) (لأن الحادثتين A, B مستقلان عشوائياً):

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

2) $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

3) $$P(\acute{A} \cap \acute{B}) = 1 - P[(\acute{A} \cap \acute{B})] = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(\acute{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4} \qquad (4$$

مثال(20.3):

يمكن لمؤشر داوجونز في بورصة نيويورك أن يزداد أو ينخفض يومياً. فإذا كان احتمال الزيادة (0.50) في اليوم، فخلال أربعة أيام عين احتمال أن يزداد مرة على الأقل، علماً بأن الزيادة أو النقصان هي حوادث مستقلة.

الحل:

ليكن E_i حادثة أن يزداد المؤشر في اليوم i ، حيث $i = 1, 2, 3, 4$ والحادث المطلوب $\bigcup_{i=1}^{4} E_i$:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{4} E_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i-1}^{4} \acute{E}_i\right) = 1 - P\left(\prod_{i=1}^{4} P(E_i)\right) = 1 - (0.50)^4 = 0.938$$

4.3: تمارين غير محلولة:

1) عين عدة فضاء العينة في تجربة دراسة توزع الإناث لدى أسرة تملك خمسة أطفال؟

2) عين عدة فضاء العينة وفضاء العينة في تجربة إلقاء أربع قطع نقود متوازنة؟

3) لدى أسرة أربعة أطفال. عين احتمال أن يكون لدى الأسرة:

أ- ذكران على الأقل.

ب- أنثى على الأكثر.

ت- ثلاثة ذكور وأنثى.

ث- ثلاثة ذكور أو أربع إناث.

4) ثلاث آلات M_1, M_2, M_3 تنتج $25\%, 35\%, 40\%$ من إنتاج مصنع على الترتيب، ولنفترض أن $5\%, 4\%, 2\%$ من إنتاج هذه الآلات سيِّىء الصنع على الترتيب أيضاً. اخترنا سلعة من إنتاج هذا المصنع فكانت سيئة الصنع ، عين احتمال كون السلعة من إنتاج الآلة M_1.

5) يحوي كيس 7 كبسولات دواء سوداء، 5 كبسولات بيضاء. سحب عشوائياً 5 كبسولات، والمطلوب: احسب احتمال الحصول على كبسولتين بيضاء اللون ضمن الكبسولات المسحوبة.

6) كيس يحوي 10 بذور، 4 منها تنتج زهوراً صفراء ، و 4 أخرى تنتج زهوراً حمراء و 2 منها تنتج زهوراً بيضاء. سحبنا عشوائياً من هذا الكيس ثلاث بذور عشوائياً. فما احتمال أن تنتج هذه البذور زهوراً من نفس اللون؟

7) تم تصنيف مجموعة من الأشخاص حسب عيار السكر بالدم عندهم وحسب درجة ارتفاع الضغط الشرياني لديهم ووفق الجدول الآتي:

	عيار السكر بالدم			المجموع
	عادي	متوسط	عالٍ	
ضغط عالٍ	5	10	20	35
ضغط عادي	35	25	5	65
المجموع	40	35	25	100

تم اختيار شخص عشوائياً من بين هذه المجموعة ، والمطلوب:

أ- إذا كان الشخص الذي تم اختياره ذا ضغط عالٍ فما احتمال أن يكون عيار السكر بالدم لديه متوسطاً؟

ب- ما احتمال أن يكون الشخص الذي تم اختياره ذا ضغط عالٍ.

ت- إذا كان الشخص الذي تم اختياره ذا عيار عالٍ للسكر بالدم، فما احتمال أن يكون ضغطه عادياً؟

8) مصنع لأجهزة قياس ضغط الدم فيه 4 خطوط إنتاج. فإذا كان الخط الأول يسهم بإنتاج 25% من إنتاج المصنع ومن ضمن إنتاجه 2% معيب الصنع ، وكان الخط الثاني يسهم بإنتاج 15% من إنتاج المصنع ومن ضمن إنتاجه 1% معيب الصنع ، وكان الخط الثالث يسهم بإنتاج 35% من إنتاج المصنع ومن ضمن إنتاجه 3% معيب الصنع، وكان الخط الرابع يسهم بإنتاج 25% من إنتاج المصنع ومن ضمن إنتاجه 4% معيب الصنع، تم اختيار جهاز من إنتاج المصنع. والمطلوب:

أ- ما احتمال أن يكون الجهاز الذي تم اختياره معيب الصنع؟

ب- إذا كان الجهاز الذي تم اختياره معيب الصنع فما احتمال أن يكون

a. من إنتاج الخط الثاني؟

b. من إنتاج الخط الرابع؟

9) في مجتمع مدينة معينة، تبلغ نسبة الإصابة بمرض معين 0.10 واحتمال أن يقرر طبيب معين إصابة شخص بهذا المرض، علماً أنه مريض بالفعل هو 0.90 واحتمال أن يقرر إصابته علماً أنه غير مصاب هو 0.04. ما احتمال أن يكون شخص من هذا المجتمع مصاباً بالمرض المذكور علماً بأن الطبيب أبلغه ذلك؟

5.3 المتغير العشوائي والتوزيع الاحتمالي

مثال (21.3):

لتكن التجربة اختيارا عشوائياً لطالب من الطلاب المسجلين في جامعة دمشق وليكن:

X= 0 أو X= 1 وفقاً لما إذا كان يسكن في المدينة الجامعية أو لا يسكن في المدينة الجامعية .

Y = عدد أخوته

Z = طوله بالسنتمتر

فالمتغيرات X و Y و Z هي متغيرات عشوائية. وكل متغير من هذه المتغيرات الثلاثة يأخذ قيمة واحدة و واحدة فقط عند كل تجربة.

فمن أجل كل طالب يأخذ X قيمة واحدة فقط هي إما 1 وإمّا 0 ، و يأخذ Y قيمة واحدة فقط هي عبارة عن عدد صحيح غير سالب. ويأخذ Z قيمة واحدة فقط هي عبارة عن عدد حقيقي موجب.

مثال (22.3):

لتكن التجربة هي إلقاء قطعة نقود ثلاث مرّات متتالية ، وليكن X عدد أوجه الـ H التي نحصل عليها . فالمتغير X هو متغير عشوائي قيمه الممكنة 0 أو 1 أو 2 أو 3 .

وهو يأخذ قيمة واحدة عند كل مرّة نجري هذه التجربة ، والجدول الآتي يبيّن ذلك:

نتيجة التجربة	HHH	HHT	HTH	THH	HTT	THT	TTH	TTT
قيمة X	3	2	2	2	1	1	1	0

مما سبق يتضح لنا بصورة عامة ، مفهوم المتغير العشوائي.

مثال (23.3):

نقذف قطعة نقود حتى يظهر وجه الـ H للمرة الأولى . وليكن X عدد القذفات التي نحتاج إليها. النتائج الممكنة للتجربة أو فضاء العينة (مجموعة نتائج التجربة) هو:

H , TH , TTH ,....

ومن الواضح أن X يمكن أن يكون 1 أو 2 أو 3 الخ ....أي إنَّ فضاء العينة الذي ولده X ، أو مجموعة قيمه الممكنة هي مجموعة الأعداد الطبيعية {1,2,3,...}.

1.5.3 تصنيف المتغيرات العشوائية:

لنعد إلى المثال (21.3) ولنتساءل عن مجموعة القيم الممكنة لـ Z، طول الطالب. بما أننا سنستخدم مسطرة مدرجة لقياس الطول فإنّ طول الطالب سيقابل نقطة على هذه المسطرة هي في الواقع نقطة محور موجه.

والقيمة التي يأخذها Z يمكن أن تكون أي نقطة من مجال على محور موجه. وبالطبع يوجد في أي مجال من محور موجه، مهما كان صغيراً ، مالا نهاية له ولا يمكن عدّه أو حصره من النقاط. وبالرغم من أنّ فضاء العينة يولده X في

المثال (3.5) لا نهائي أيضاً. إلاّ أنَّ هناك خلافاً أساسياً بين طبيعتي الفضاءَيْنِ . فإحداهما قابل للعد والآخر غير قابل للعد (لماذا ؟)

1.1.5.3 الفضاء المنقطع (منفصل):

نقول عن فضاء عينة إنّه فضاء منفصل إذا كان يحوي عدداً منتهياً من النقاط أو لا نهاية قابلة للعد من النقاط.

2.1.5.3 الفضاء المستمر (المتصل):

نقول عن فضاء عينة إنّه فضاء متصل (أو مستمر) إذا كان يحوي لا نهاية غير قابلة للعد من النقاط.

ووفقاً لهذا التصنيف نصنف المتغيرات العشوائية إلى متغيرات منفصلة ومتغيرات متصلة (مستمرة).

3.1.5.3 المتغير العشوائي المنفصل(المنقطع):

نقول إنَّ المتغير العشوائي منفصل إذا كانت مجموعة قيمه الممكنة مجموعة منتهية أو لا نهائية قابلة للعد أي إذا كان الفضاء الاحتمالي الذي يولده هذا المتغير فضاء منفصل.

4.1.5.3 المتغير العشوائي المتصل (المستمر):

نقول عن متغير عشوائي أنه مستمر إذا كانت مجموعة قيمه الممكنة مجموعة لا نهائية وغير قابلة للعد .

2.5.3 المتغيرات العشوائية المنفصلة وتوزيعاتها:

التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل هو صيغة أو جدول يعرض القيم الممكنة والاحتمال الموافق لكل قيمة.

مثال(24.3):

إنّ التوزيع الاحتمالي في المثال (22.3) لـ X هو:

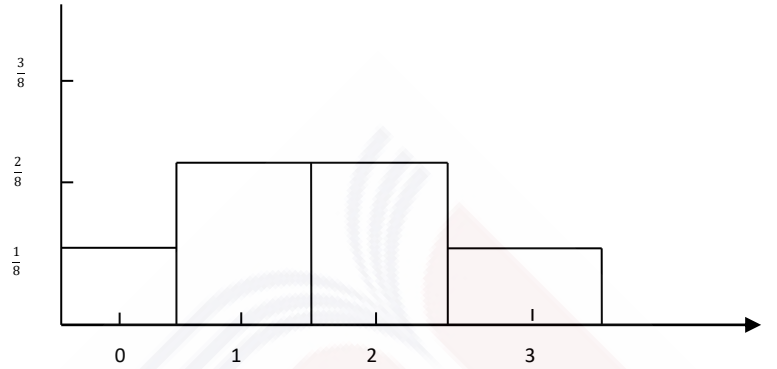
X	0	1	2	3
$f_X(x) = P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

حيث $f(x) = p(X = x)$

(على الطالب فهم كيف تمّ الحصول على الجدول).

ويمكن تمثيل هذا التوزيع بيانياً لنحصل على ما يسمى بالمدرج الإحتمالي.

فلنتخذ القيم الممكنة مراكز لمجالات (فترات) تمتد بمقدار الواحد (نصف على اليمين القيمة ونصف على يسارها) ولنرسم فوق كل فترة (مجال) مستطيلاً ارتفاعه يساوي الاحتمال الموافق ، فنحصل على مدرج الاحتمال كما في الشكل الآتي:



المدرج الاحتمالي للتوزيع في المثال (22.3)

يجب أن تحقق دالة الاحتمال $f(x)$ المتغير العشوائي منفصل الشرطين الآتيين:

1. $f(x) \geq 0$ مهما تكون x
2. $\sum_x f(x) = 1$ حيث $\sum_x$ تعني المجموع فوق مجموع القيم الممكنة x للمتغير X .

3.5.3: <u>المتغيرات العشوائية المستمرة:</u>

تشكل الكميات التي تستخدم للحصول على مقاديرها لأجهزة قياس، أو أدوات قياس متغيرات عشوائية مستمرة. فالوزن والقوة والطول ومعدل هطول المطر ودرجة حرارة جسم كلها أمثلة على متغيرات عشوائية مستمرة. وقياسات مثل هذه المتغيرات هي نقاط على خط اتخذنا عليه تدريجاً أو سلماً للقياس، أي إنها نقاط على المحور الموجه (محور الأعداد الحقيقية)، أو على فترات (مجالات) من هذا المحور ، ولا يمكننا في حالة متغير عشوائي مستمر، تخصيص احتمال مهما كان صغيراً لأي قيمة من قيم المتغير نظراً للكثرة الكاثرة من القيم المختلفة، إذ توجد لا نهاية غير قابلة للعد من النقاط في أي فترة مهما صغرت، مما يؤدي إلى الخروج

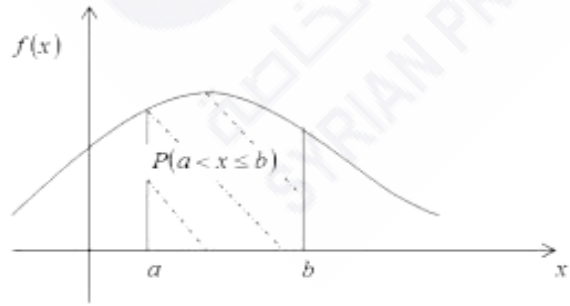
عن مسلمة الاحتمال (التي تقول إن احتمال أي حدث لا يزيد على الواحد). (يجب التوضيح) . و لا بد من التفكير في طريقة لبناء النموذج الاحتمالي مختلفة تماماً عما رأيناه في حالة متغير عشوائي منفصل.

بالعودة إلى الإحصاء الوصفي إذ رأينا إمكانية تفسير المساحة تحت مدرج التكرار النسبي كاحتمال. وإلى منحني التكرار حيث يمثل كل نقطة على محور السينات (المحور *ox*) قياساً ، ويمثل الإحداثي العمودي (على المحور *oy*) لتلك النقطة تواتراً ، أو تكرار ظهور هذا القياس في المجتمع من القياسات الذي يصفه منحني التكرار. إذ تقدم لنا هذه الأفكار نقطة البداية في محاولة بناء نموذج احتمال عشوائي مستمر.

لنبدأ بالقول إنه إذا كان تكرار ظهور القياس *a*، مثلاً أكبر من تكرار ظهور القياس b. ولتغير منحني التكرار منحني كثافة يبّين لنا كيف تتغير الكثافة الاحتمالية من نقطة إلى أخرى. ولنسمي الدالة المستمرة $f(x)$ التي بيانها هو منحني التكرار، دالة كثافية احتمالية .عندئذ تمثل المساحات تحت هذا المنحني احتمالات.

واحتمال أن يقع قياس المتغير X ضمن الفترة (*a,b*) ،أي

$p(a < X < b)$ هو المساحة تحت منحني الكثافة وفوق المجال (*a,b*) (انظر الشكل الآتي)



وترتب علينا مثل هذه الطريقة شرطين ، لا بدَّ لأي دالة كثافة أن تحققهما كي لا نخرج على مسلمات الاحتمال . فما دام الاحتمال غير سالب ، لا يجوز أن يكون جزء من منحني الكثافة تحت المحور الأفقي ox . وبما أنَّ احتمال الحادثة الأكيدة أي $p(-\infty < X < +\infty)$ يجب أن يكون مساوياً للواحد تماماً.

وهكذا نكتب القاعدة الآتية:

قاعدة :

كي تصلح دالة مستمرة $f(x)$ كدالة كثافة احتمالية يجب أن تحقق الشرطيين الآتيين:

1. $f(x) \geq 0$ مهما يكن x.
2. المساحة تحت بيان $f(x)$ (أي تحت منحني الكثافة) تساوي الواحد تماماً.

4.5.3 دالة التوزيع الاحتمالي المتجمع:

رأينا أنّ التكرار المتجمع الصاعد يجيب عن السؤال الآتي: ما التكرار النسبي لظهور قياس يقل عن قيمة محددة؟ وستجيب دالة التوزيع المتجمع عن سؤال مشابه: ما احتمال أن يأخذ متغير عشوائي X قيمة أقل أو تساوي قيمة محددة؟ وإذا رمزنا لهذه الدالة بـ F فإن قيمة هذه الدالة في النقطة x هي ببساطة احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X قيمة أقل أو تساوي x أي :

$$F(x) = p(X \leq x)$$

1.4.5.3 حالة متغير عشوائي منفصل:

دالة التوزيع المتجمع لمتغير عشوائي منفصل X ، دالة احتماله $f(x)$ هي بالتعريف :

$$F(t) = \sum_{x \le t} f(x)$$

حيث $\sum_{x \le t}$ تعني المجموع فوق جميع القيم الممكنة التي تقل عن t.

مثال (25.3):

في المثال (27.3) ما احتمال الحصول على وجه الـ H مرتين على الأكثر؟

الحل :

المطلوب هو حساب :

$$P(X \le 2) = F(2) = \sum_{x=0}^{2} f(x) = f(0) + f(1) + f(2)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

تمرين: أعط تفسيراً عملياً لهذه النتيجة.

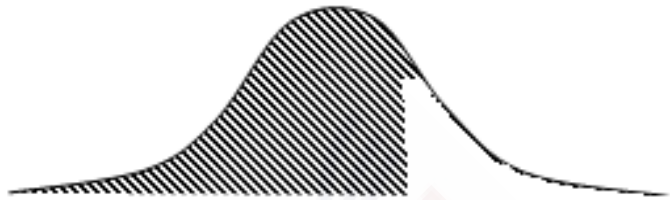
2.4.5.3 حالة متغير عشوائي مستمر:

دالة التوزيع المتجمع لمتغير عشوائي متصل x دالة كثافته $f(x)$ هي بالتعريف:

المساحة تحت منحني الكثافة الواقعة إلى اليسار من النقطة t

$$F(t) = P(X \le t)$$

انظر الشكل الآتي :



دالة التوزيع المتجمع لمتغير عشوائي متصل

سنتحدث في الفقرتين القادمتين عن متوسط مجتمع القياسات وعن تباينه على الترتيب . وسنصطلح على استخدام عبارة (متوسط المجتمع) أو عبارة (تباين المجتمع) أو (تباين التوزيع)، و (الانحراف المعياري للمجتمع) أو (الانحراف المعياري للتوزيع) . وسنرمز كما جرت العادة في أدبيات الإحصاء للانحراف المعياري للمجتمع بالحرف اليوناني σ (ننطقه **<** سيجما**>**).

<u>التوقع الرياضي :</u>

1.5.3 <u>التوقع الرياضي لمتغير عشوائي:</u>

ليكن X متغيراً عشوائياً منفصلاً دالة احتماله $f(x)$.

ولنرمز لتوقع X بـ $\mathrm{E(X)}$ أو μ_{X} أو μ ، فعندئذٍ : $\mathrm{E(X)} = \sum_x x.f(x)$

حيث $\sum_x$ يعني المجموع فوق كل القيم الممكنة للمتغير X.

هذا التعريف يقدم قاعدة لحساب توقع متغير عشوائي منفصل .

المعنى التطبيقي لـ $\mathrm{E(X)}$ أو التفسير العملي له: القيمة المتوقعة $\mathrm{E(X)}$ للمتغير X هي متوسط القيم التي يمكن أن يفترضها هذا المتغير على المدى الطويل، أي بعبارة أخرى متوسط مجتمع القياسات الموافق للمتغير X.

مثال (26.3):

في المثال (22.3) احسب $E(X)$.

الحل:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{3} x.f(x) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = 1.5$$

ومما سبق يمكن القول إنّ:

1 . (المقدار 1.5) هي القيمة المتوقعة رياضياً لعدد أوجه الـ H .

2. يتمركز التوزيع الاحتمالي لعدد أوجه الـ H حول النقطة 1.5 . ولو نظرنا إلي صورة المدرج الاحتمالي في المثال (22.3) لوجدنا أنه يتمركز حول النقطة 1.5 على المحور ox. فالقيمة 1.5 هي متوسط التوزيع الاحتمالي.

3. التفسير العملي للقيمة 1.5 هو أنها تمثل القيمة المتوسطة لعدد أوجه الـ H على المدى الطويل (أي متوسط مجتمع القياسات) . بمعنى أننا لو كررنا قذف قطع النقود الثلاث عدداً هائلاً من المرّات وسجلنا عدد أوجه الـ H التي حصلنا عليها ثم حسبنا متوسط هذه الأعداد لحصلنا على1.5 .

2.5.3 التوقع الرياضي لدالة عددية في X :

$$E[g(X)] = \sum_x g(x).f(x)$$

مثال (27.3): احسب $E(X^2)$ في المثال (23.3):

الحل :

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{6} x^2.f(x)$$

$$=1^2.\frac{1}{6}+2^2.\frac{1}{6}+3^2.\frac{1}{6}+4^2.\frac{1}{6}+5^2.\frac{1}{6}+6^2.\frac{1}{6}$$

$$=\frac{91}{6}=15.17$$

وبصورة مشابهة تماماً نعرف توقع متغير عشوائي مستمر . كل ما في الأمر أنّ دالة الكثافة الاحتمالية تقوم مقام دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير المنفصل وتصبح إشارة المجموع Σ إشارة تكامل $\int$. ولن نتطرق لذلك في هذا المقرر.

3.5.3 خواص التوقع :

1. (**c** ثابت) $E(c)=\sum_x c.f(x)=c.\sum_x f(x)=c$

2. $E(cX)=\sum_x cx.f(x)=c.\sum_x x.f(x)=c.E(X)$

3. إذا كان $g(X)=g_1(x)+g_2(x)$ **فإنّ:**

$$E[g(X)]=\sum_x g(x).f(x)=\sum_x[g_1(x)+g_2(x)].f(x)$$

$$=\sum_x g_1(x).f(x)+\sum_x g_2(x).f(x)=E[g_1(X)]+E[g_2(X)]$$

ومنه نستنتج الخاصة:

$$E[g_1(X)+g_2(X)]=E[g_1(X)]+E[g_2(X)]$$

وبصورة خاصة ، إذا كان X_1 و X_2 أي متغيرين عشوائيين فإنّ:

$$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)$$

4. من الخاصتين السابقتين يمكننا أن نكتب بصورة عامة:

$$E[C_1X_1+C_2X_2+\cdots.C_nX_n]=C_1E(X_1)+C_2E(X_2)+\cdots.+C_nE(X_n)$$

حيث X_1 و X_2 و .....و X_n متغيرات عشوائية و $c_1, c_2, \dots \dots, c_n$ أعداد ثابتة.

مثال (28.3):

تقدم الإحصائية الآتية وصفاً لمجتمع الأسر التي تقطن مدناً كبيرة من حيث خاصية امتلاكها للسيارات:

20% من الأسر لا تمتلك أي سيارة و 50% من الأسر تمتلك سيارة واحدة و 15% من الأسر تمتلك سيارتين و 10% من الأسر تمتلك ثلاث سيارات و 5% من الأسر تمتلك أربع سيارات.

إذا رمزنا بـ X لعدد السيارات و بـ Y لعدد العجلات التي تمتلكها أسرة.

1. ما متوسط عدد السيارات للأسرة الواحدة؟
2. احسب متوسط عدد العجلات للأسرة الواحدة.

الحل:

1. من الواضح أنّ الوصف المعطى لمجتمع الأسر والمتعلق بقياسات X في هذا المجتمع يقدم دالة التوزيع الاحتمالي لـ X .

X	0	1	2	3	4
f(x)	0.20	0.50	0.15	0.10	0.05

ومتوسط عدد السيارات للأسرة الواحدة هو $E(X)$. ومن التعريف لدينا :

$$E(X) = \sum_x x.f(x)$$
$$=0(0.20)+ 1(0.50)+ 2(0.15)+ 3(0.10)+ 4(0.05)=1.3$$

2. عدد العجلات عند أسرة هو عدد السيارات التي تمتلكها مضروباً بـ 5 أي:

$$Y = 5X$$

والمطلوب هو $E(Y)$. ومن خواص التوقع لدينا:

$$E(Y) = E(5X) = 5E(X) = 5(1.3) = 6.5$$

ومتوسط عدد العجلات للأسرة الواحدة هو *6.5* عجلة.

3.5.3 تباين متغير عشوائي:

تعريف: تباين متغير عشوائي X ، ونرمز له بـ *V(X)* أو σ^2_X أو σ^2 عندما نأمن الالتباس ويعطى بالعلاقة :

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X - \mu)^2$$

نتيجة : الصيغة المختزلة للتباين هي :

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

مثال (29.3):

في المثال (22.3) احسب تباين X .

الحل:

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

ونعلم من المثال (32.*3*) أن $\mu = E(X) = 1.5$

إذاً :

$$V(X) = 3 - (1.5)^2 = 3 - 2.25 = 0.75$$

4.5.3 الانحراف المعياري لمتغير عشوائي:

الانحراف المعياري لمتغير عشوائي X وسنرمز له بـ σ_X أو اختصاراً σ عندما نأمن الالتباس ، هو الجذر التربيعي الموجب للتباين:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

وفي المثال السابق الانحراف المعياري لعدد أوجه الـ ***H*** الناتجة عن قذف ثلاث قطع متزنة من النقود هو :

$$\sigma = \sqrt{0.75} = 0.865$$

<u>خواص التباين:</u>

1. تباين العدد الثابت هو الصفر

$$V(C) = E(C^2) - [E(C)]^2 = C^2 - C^2 = 0$$

2. $V(CX) = C^2V(X)$ حيث X أي متغير عشوائي و C ثابت.

3. يمكن البرهان أنّه إذا كان المتغيران X_1 و X_2 مستقلين فيما بينهما فإنّ

$$V(X_1 \mp X_2) = V(X_1) + V(X_2)$$

ويمكن تعميم هذه القاعدة إلى أكثر من متغيرين ، فنقول إنّه إذا كانت المتغيرات $X_1, X_2, \dots \dots, X_n$ مستقلة فيما بينها فإنّ:

$$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$$

أو بعبارة أخرى: $V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$

6.3 <u>بعض التوزيعات الاحتمالية الشهيرة</u>

1.6.3 <u>بعض التوزيعات الاحتمالية المنقطعة:</u>

نتناول فيما يأتي بعض التوزيعات الاحتمالية التي تؤِّدي دوراً مهمّاً في حل كثير من المسائل التطبيقية.

1.1.6.3 <u>توزيع برنولي:</u> نسمي كل تجربة لها نتيجتان تجربة برنولية (ثنائية). نسمي إحدى النتيجتين نجاحاً، ونسمي النتيجة الأخرى فشلاً، فإذا كان P يمثل احتمال النجاح عندها نسمي P وسيط التجربة البرنولية، و $q = 1 - P$ احتمال الفشل.

فتجربة إلقاء قطعة نفود متزنة هي تجربة برنولية لها نتيجتان ، إما الشعار (نجاح) إمّا الكتابة (فشل) ، ووسيط هذه التجربة البرنولية $P = \frac{1}{2}$

والتسديد نحو هدف هو تجربة برنولية ، ونتيجة طالب في امتحان مقرر ما هي تجربة برنولية ، وانتظار مولود لمعرفة جنسه هي تجربة برنولية أيضاً إلخ ....

إذا رمزنا بـ x لعدد مرات النجاح في تجربة برنولية وسيطها P ، تكون مجموعة قيم X هي $R_X = \{0,1\}$ ويكون احتمال النجاح $P = P(X = 1)$

واحتمال الفشل $q = P(X = 0) = 1 - P$ ، $q = 1 - P$

أي إن لـ X التوزيع الاحتمالي :

X	0	1
$P(X = x) = f(x)$	q	P

تعريف: نقول إنّ للمتغير العشوائي X توزيعاً برنولياً بالوسيط P إذا كان لـ X دالة الاحتمال:

$$f(x) = P^x q^{1-x} \ , \ x = 0,1 \ , q = 1 - P \ , \ 0 < P < 1$$

أي إن لـ X جدول التوزيع الاحتمالي :

X	0	1
$f(x)$	q	P

التوقع الرياضي والتباين :

$$E(X) = \sum_x x.f(x) = \sum_{x=0}^{1} x\, P^x q^{1-x} = 0 + P = P$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2 f(x) = \sum_{x=0}^{1} x^2\, f(x) = 0^2(q) + 1^2(P) = P$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = P - P^2 = P(1-P) = pq$$

$$\sigma_X = \sqrt{pq}$$

2.1.6.3 التوزيع الثنائي (الحداني):

إذا كررنا تجربة برنولية وسيطها P (احتمال النجاح) n مرة ، وكانت هذه التكرارات مستقلة. إذا رمزنا بـ X لعدد مرّات النجاح عند تكرار هذه التجربة البرنولية n مرّة ، فإن مجموعة قيم X هي $R_X = \{0,1,2,\ldots\ldots,n\}$

ويمكننا أن نثبت أنّ:

$$f(x) = P(X = K) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\ p^k q^{n-k}\ ,\ K = 0,1,2,\ldots\ldots,n$$

تعريف: نقول إنّ للمتغير العشوائي X توزيعاً ثنائياً (حدانياً) بالوسيطين n و P إذا كان لـ X دالة الاحتمال:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}\ p^x q^{n-x}\ \ ,x = 0,1,\ldots n$$

أي إن لـ X جدول التوزيع الاحتمالي:

X	0	1	.....	K	...	n
f(x)	q^n	npq^{n-1}	.....	$\frac{n!}{k!(n-k)!}\ p^k q^{n-k}$	...	P^n

نعود لنؤكد أن المتغير العشوائي X الذي له التوزيع الحداني بالوسيطين n و P (أي $X \sim b(n;P)$) يمثل عدد مرات النجاح عند تكرار تجربة برنولية (وسيطها P) n مرّة .

يمكننا أن نثبت أنّ هذه الدالة تحقق الشرطين :

1. $f(x) \geq 0$ من أجل جميع قيم x
2. $\sum_{x=0}^{n} f(x) = 1$

<u>مثال (30.3):</u> إذا كان احتمال أن يصيب رامٍ الهدف 0.8 ، فإذا صوب الرامي نحو الهدف 5 مرات ورمزنا بـ X لعدد مرات إصابة الهدف .

المطلوب:

أ- اكتب دالة احتمال المتغير العشوائي X .

ب- احسب احتمال اصابة الهدف مرة واحدة فقط.

ت- احسب احتمال إصابة الهدف مرّة واحدة على الأكثر.

ث- احسب احتمال اصابة الهدف مرتين على الأقل.

ج- احسب احتمال إصابة الهدف.

الحل:

أ- إنّ التسديد نحو الهدف تجربة برنولية لها نتيجتان ، إما النجاح (إصابة الهدف) وإما الإخفاق (عدم إصابة الهدف) ووسيطها $P = 0.8$ والتسديد نحو الهدف 5 مرات يعني تكرار هذه التجربة البرنولية 5 مرات ، ومِنْ ثَمَّ يكون لـ X (عدد مرات إصابة الهدف) التوزيع الحداني بالوسيطين $n = 5$ و $P = 0.8$ أي إنّ:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{5!}{x!(5-x)!}\,(0.8)^x(0.2)^{5-x}\ ;\ x = 0,1,2,3,4,5$$

ب- الاحتمال المطلوب:

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{5!}{1!4!}\,(0.8)^1(0.2)^4 = 5(0.8)(0.0016) = 0.0064$$

ت-

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{5!}{0!5!}\,(0.8)^0(0.2)^5 + 0.0064 =$$

$$(0.2)^5 + 0.0064 = 0.00672$$

ث-

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \ge 2) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} < 2) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \le 1)$$
$$= 1 - 0.00672 = 0.99428$$

ج-

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \ge 1) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} < 1) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0)$$
$$= 1 - 0.00032 = 0.99968$$

التوقع الرياضي والتباين:

$$\boldsymbol{\mu} = E(X) = nP = (5)(0.8) = 4$$

$$\sigma^2 = V(X) = nPq = (5)(0.8)(0.2) = 0.8$$

مثال (31.3):

إذا علمت أن احتمال شفاء مريض مصاب بالزكام خلال أسبوع دون اللجوء إلى الطبيب هو 0.6 فإذا كان لدينا 10 مرضى بالزكام ولم يراجعوا الطبيب ، فما احتمال أن يشفى بعضٌ منهم خلال أسبوع:

1. ثلاث مرضى.
2. 8 مرضى على الأقل.
3. من 2 إلى 5 مرضى .
4. 6 مرضى.

الحل:

النموذج المدروس هو تجربة ثنائية (يشفى أو لا يشفى) ومكرره تكرار مستقل 10 مرات.

فإذا كان X المتغير الدال على المرضى الذين يتم شفاؤهم خلال أسبوع من الزكام دون اللجوء إلى الطبيب فعندئذٍ: $X \sim b(n = 10\ , P = 0.6)$

$$P[X = K] = \binom{n}{k} P^K q^{n-k} = \binom{10}{k}(0.6)^K(0.4)^{10-k}\ ; k = 0,1,2,..,10$$

الطلب (1): $P[X = 3] = \binom{10}{3}(0.6)^3(0.4)^7 = 0.0433$

الطلب (2):

$$P[X \geq 8] = p[x = 8] + p[x = 9] + p[x = 10] =$$

$$\binom{10}{8}(0.6)^8(0.4)^2 + \binom{10}{9}(0.6)^9(0.4) + \binom{10}{10}(0.6)^{10}(0.4)^0$$

$$=0.1209 + 0.0403 + 0.006 = 0.1672$$

الطلب (3):

$$P[2 \leq x \leq 5] = p[x = 2] + p[x = 3] + p[x = 4] + p[x = 5]$$

$$=0.0106+0.0423+0.1050+0.2007 =0.3586$$

الطلب (4):

$$P[X = 6] = \binom{10}{6}(0.6)^6(0.4)^4 = (210)(0.6)^6(0.4)^4 = 0.251$$

مثال(32.3): ظهر دواء جديد لمعالجة سرطان الدم، معدل نجاحه 0.80 ، أعطي هذا الدواء لـ 15 مريضاً بسرطان الدم. المطلوب احسب احتمال :

1) شفاء 12 مريضاً منهم .
2) شفاء 12 مريضاً منهم على الأقل.

الحل:

لدينا هنا تجربة ثنائية (شفاء المريض أو عدم شفائه) ومكرره تكرار مستقل 15 مرة. ومِنْ ثَمَّ النموذج المدروس يتوزع وفق التوزيع الحداني بالوسطاء $n=15$، $p=0.80$ أي :

$$X \sim b(n = 15 , P = 0.80)$$

$$P[X = K] = \binom{n}{k} P^K q^{n-k} = \binom{15}{k}(0.80)^K(0.20)^{15-k} \ ;$$

$$k = 0,1,2,..,15$$

الطلب (1) :

$$P[X = 12] = \binom{15}{12}(0.80)^{12}(0.20)^{15-12}$$

$$= (15 \times 14 \times 13 \times 12!)/(12)!\,(15-12)!\,.\,(0.070)(0.008)$$
$$= (5\times 7 \times 13)\ (0.07)\ (0.008) = 0.255$$

الطلب (2):

$$P[X \geq 12] = p[x = 12] + p[x = 13] + p[x = 14] + p[x = 15]$$

$$= \binom{15}{12}(0.80)^{12}(0.20)^{3} + \binom{15}{13}(0.80)^{13}(0.20)^{2} + \binom{15}{14}(0.80)^{14}(0.20) + \binom{15}{15}(0.80)^{15}(0.20)^{0}$$

$$= 0.255 + 0.231 + 0.132 + 0.035 = 0.653$$

مثال(33.3): اختبر لقاح جديد لتحديد فعاليته في الوقاية من الزكام . وقد أعطي لعشرة أشخاص وتم مراقبتهم لفترة سنة ، ووجد أن ثمانية منهم لم يصابوا بالزكام . إذا كان احتمال عدم الإصابة بالزكام خلال سنة هو بصورة طبيعية 0.5. فما احتمال ألا يصاب ثمانية أو أكثر ، علماً أن اللقاح لا يزيد في مقاومة الجسم للبرد؟

الحل :

التجربة هنا ثنائية لأن الشخص قد يصاب أو لا يصاب .

ومكرره تكرار مستقل 10 مرات (لأن اللقاح تم تجريبه على 10 أشخاص) . ومِنْ ثَمَّ النموذج المدروس يتوزع وفق التوزيع الحداني بالوسطاء

: p = 0.5 ، n=10

فإذا كان X المتغير الدال على الذين لم يصابوا بالزكام أي :

$$X \sim b(n = 10\,, P = \tfrac{1}{2})$$

$$P[X = K] = \binom{n}{k} P^K q^{n-k} = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^K \left(\frac{1}{2}\right)^{10-k} = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \;;$$
$$k = 0,1,2,..,10$$

والمطلوب : $P[X \geq 8]$

$$P[X \geq 8] = P[X = 8] + P[X = 9] + P[X = 10]$$

$$= \binom{10}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{10}(45 + 10 + 1) = 0.055$$

قاعدة : يمكننا أن نثبت مايأْتي :

إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة التي لكل منها توزيع برنولي بالوسيط P وكان $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

يكون عندئذ للمتغير العشوائي Y التوزيع الحداني بالوسيطين n و P

3.1.6.3 <u>توزيع بواسون:</u>

توجد أمثلة نموذجية لمتغيرات عشوائية لها ولو بصورة تقريبية على الأقل توزيع بواسون. إذا كان للمتغير العشوائي X توزيع بواسون ، فإن X يمثل عدد الأحداث الملحوظة خلال وحدة قياس معينة ، زمناً كانت أم مسافة أم مساحة أم حجماً.

نقدم فيما يأتي بعض الأمثلة التي يكون فيها للمتغير العشوائي توزيع بواسون.

- العدد العشوائي للجزئيات الصادرة عن مادة مشعة خلال خمس ثوان .
- العدد العشوائي للسيارات الصغيرة التي تصل خلال ساعة محددة من كل يوم للتزود بالوقود من محطة معينة.
- العدد العشوائي للمكالمات الهاتفية التي تصل إلى مقسم إحدى الشركات خلال ربع الساعة الأولى من ساعة محددة.
- العدد العشوائي للبذور الملقحة التي لم تنبت من عبوة تحوي عدداً محدداً من البذور (وليكن 100 بذرة).
- العدد العشوائي لحالات الإسعاف التي يستقبلها مشفى معين خلال ساعة محددة من الصباح.
- العدد العشوائي للولادات التي تحصل خلال الأسبوع الأول من كل شهر في مشفى معين .
- العدد العشوائي لحوادث المرور في مدينة معينة خلال يوم ماطر . والأمثلة كثيرة.

<u>تعريف:</u> نقول إنّ للمتغير العشوائي X توزيع بواسون بالوسيط μ $(\mu > 0)$ إذا كان لـ X دالة الاحتمال الآتية:

$$f(k) = P(X = k) = e^{-\mu}.\frac{\mu^{K}}{k!}\ ; \quad k=0, 1, 2,\ldots$$

أي إنّ لـ X دالة التوزيع الاحتمالي :

X	0	1	2	...
$f_X(x)$	$e^{-\mu}$	$\mu e^{-\mu}$	$\frac{1}{2}\mu^{2} e^{-\mu}$	...

حيث : $\forall K : f(k) \geq 0$ $\left(\text{k عدد صحيح}\right)$ ، $\sum_k f(\mathrm{k}) = 1$

ويمكننا التحقق من أن التوقع الرياضي والتباين:

$$E(X) = \mu \quad ; \quad V(X) = \mu$$

مثال (34.3):

يصيب مرض نادر الأطفال حديثي الولادة بنسبة 0.003 فإذا كان هناك 120 ولادة حديثة في مشفى معين خلال أسبوع فما احتمال أن يكون من بينهم ثلاثة أطفال مصابين بهذا المرض ؟ وما احتمال أن يصاب منهم واحد على الأقل بهذا المرض؟

الحل :

التجربة هنا ثنائية (مصاب أو غير مصاب)

ومكرره تكرار مستقل 120 مرة ومِنْ ثَمَّ النموذج المدروس يتوزع وفق التوزيع الحداني بالوسطاء $n=120$ ، $p=0.003$ ويكون n كبيرة و p صغيرة فالنموذج سيتبع توزيع بواسون بالوسيط

$$\mu = np = (120)(0.003) = 0.36$$

$$X \sim poisson(\mu = 0.36) \Leftrightarrow P[X = K] = \frac{\mu^K}{K!} e^{-\mu} = \frac{(0.36)^K}{K!} e^{-0.36}$$

حيث $k = 0,1,2,3,4, \dots \dots$

الطلب (1):

$$P[X=3] = \frac{(0.36)^3}{3!}e^{-0.36} = \frac{0.047}{6}(0.698) = 0.005$$

الطلب (2):

$$P[X \geq 1] = 1 - P[X=0] = 1 - \frac{(0.36)^0}{0!}e^{-0.36}$$

$$= 1 - e^{-0.36} = 1 - 0.698 = 0.302$$

مثال (35.3):

إذا كان معدل عدد الولادات في مشفى دار التوليد هو ثلاث ولادات كل ساعة والمطلوب:

1. ما احتمال أن تكون هناك حالة ولادة واحدة خلال ساعة معينة؟

2. ما احتمال أن تكون هناك أربع ولادات على الأكثر خلال ساعة معينة.

الحل:

إذا كان X يدل على عدد الولادات خلال ساعة فإن X هنا يتوزع وفق التوزيع البواسوني بالوسيط $\mu = 3$.

$$X \sim poisson(\mu = 3) \Leftrightarrow P[X=K] = \frac{\mu^K}{K!}e^{-\mu}$$

حيث $k = 0,1,2,3,4, \dots \dots$

الطلب (1):

$$P[X=1] = \frac{\mu^1}{1!}e^{-\mu} = \frac{3}{1}e^{-3} = 0.149$$

الطلب (2):

$$P[X \leq 4] = \sum_{K=0}^{4} P[X = K] = \sum_{K=0}^{4} \frac{3^K}{K!} e^{-3}$$

$$= e^{-3}\left[\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!}\right] = 0.82$$

4.1.6.3 **تقريب التوزيع الثنائي بتوزيع بواسون:**

إذا كان X متغيراً عشوائياً يتوزع وفق التوزيع الحداني (الثنائي) بالوسطاء n ، P وإذا كانت n كبيرة و P صغيرة أي μ=np يبقى ثابتاً موجباً فإن X عندئذ يتوزع تقريباً وفق توزيع بواسون بالوسيط μ=np أي:

كما رأينا في المثال قبل السابق:

$$X \sim b(n, p) \approx poisson(\mu = np)$$

مثال(36.3): إذا كان احتمال أن يعاني شخص من رَدَّ فِعْلٍ سَيِّئاً عند حقنه بمصل معين هو 0.001 فأوجد احتمال أن يكون من بين 2000 شخص سيحقنون بالمصل:

1 . ثلاثة أشخاص سيعانون رَدَّ فِعْلٍ سَيِّئاً.

2. أكثر من شخص سيعانون رَدَّ فِعْلٍ سَيِّئاً.

الحل :

ليكن X المتغير الدال على عدد الأشخاص الذين سيعانون رَدَّ فِعْلٍ سَيِّئاً عند حقنهم بالمصل عندئذ:

الطلب الأول:

$$X \sim b(n = 2000, p = 0.001) \approx poisson(\mu = np = 2)$$

الطلب الثاني :

$$P[X=3]=\frac{\mu^{K}}{K!}e^{-\mu}=\frac{2^3}{3!}e^{-2}=0.19$$

$$P[X\geq 2]=1-P[X\leq 1]$$

$$=1-P[X=1]-P[X=0]$$

$$=1-\frac{2}{1!}e^{-2}-\frac{2^0}{0!}e^{-2}$$

$$=1-0.271-0.135=0.594$$

2.6.3 بعض التوزيعات المستمرة الشهيرة :

1.2.6.3التوزيع الأسي:

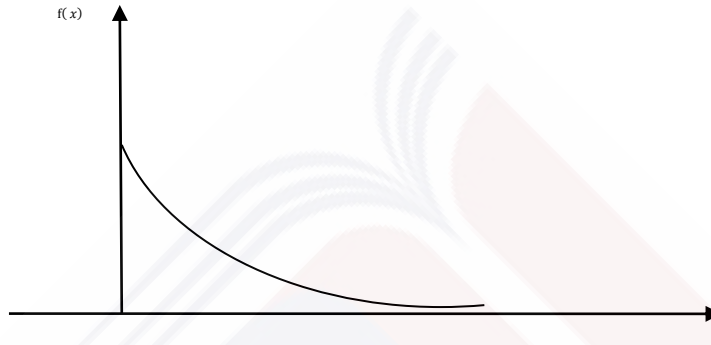
للتوزيع الأسي أهمية كبيرة في المجال التطبيقي ، إذ يعد نموذجاً مناسباً لكثير من المسائل التي تواجهنا في حياتنا العملية ، فعلى سبيل المثال ، تمثل الأزمان الآتية:

- الزمن العشوائي لمكالمة هاتفية.
- الزمن العشوائي بين مكالمتين هاتفيتين.
- الزمن العشوائي لصيانة جهاز في ورشة صيانة.
- عمر عنصر إلكتروني (مكثف ، مقاومة ، ...).
- الزمن العشوائي لتخديم زبون في مرفق خدماتي .

متغيرات عشوائية لها التوزيع الأسي.

تعريف: نقول إنّ للمتغير العشوائي المستمر X التوزيع الأسي بالوسيط λ (λ>0) إذا كان لـ X الكثافة الاحتمالية الآتية:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; \ x > 0 \\ 0 & ; \ x \leq 0 \end{cases}$$



منحني الكثافة (المنحني التكراري) للتوزيع الأسي

- **<u>دالة التوزيع الاحتمالي(المتجمع):</u>**

$$F(t) = P(X < t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & ; \ t>0 \\ 0 & ; \ t \leq 0 \end{cases}$$

- **<u>التوقع الرياضي والتباين:</u>**

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

مثال(37.3):

إذا كان X عمر صمام كهربائي (بالساعات) له الكثافة الاحتمالية:

$$f(x) = \begin{cases} 0.0001\, e^{-0.0001x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

المطلوب:

1. أوجد دالة التوزيع المتجمع لـ X.
2. أوجد العمر الوسطي للصمام.
3. أوجد احتمال أن يعمر المصباح على الأقل 8000 ساعة.

الحل:

.1

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-0.0001t} & ; \ t>0 \\ 0 & ; t \leq 0 \end{cases}$$

.2

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.0001} = 1000h$$

$$P(X > 8000) = 1 - P(X \leq 8000)$$

$$= 1 - F(8000) = 1 - [1 - e^{-0.8}] = e^{-0.8} \approx 0.449$$

2.2.6.3: <u>التوزيع الطبيعي :</u>

يعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية لما له من تطبيقات مهمة في مجال الإحصاء، إذ يستخدم هذا التوزيع في كثير من المسائل التطبيقية .

1. يستخدم التوزيع الطبيعي في وصف كثير من المتغيرات العشوائية إذ نلحظ أن عدداً كبيراً من المتغيرات العشوائية (من أطوال ، أوزان ، ...إلخ) التي نواجهها في حياتنا العامة لها منحني كثافة ، أو منحني تكرار ، له تقريباً شكل الجرس ، أو كما نعبر عن ذلك إحصائيا ، له بصورة تقريبية شكل منحني التكرار الطبيعي ، أو شكل التوزيع الطبيعي.

إذا كان منحني تكرار (كثافة) مجموعة قياسات لها شكل التوزيع الطبيعي فإن معظم القياسات تتركز حول القيمة الحقيقية التي تشكل المتوسط أو قريبة منها.

2. يعتبر التوزيع الطبيعي تقريباً جيداً و مفيداً بكثير من التوزيعات الاحتمالية.

3. يؤدِّي دوراً مهمّاً ، بل يعد حجر الزاوية في الاستدلال الإحصائي.

<u>تعريف:</u>

نقول إن للمتغير العشوائي X التوزيع الطبيعي بالوسيطين μ و σ^2 ونعبر عن ذلك بالرمز $X \sim N(\mu\ ,\sigma^2)$ إذا كانت كثافته الاحتمالية:

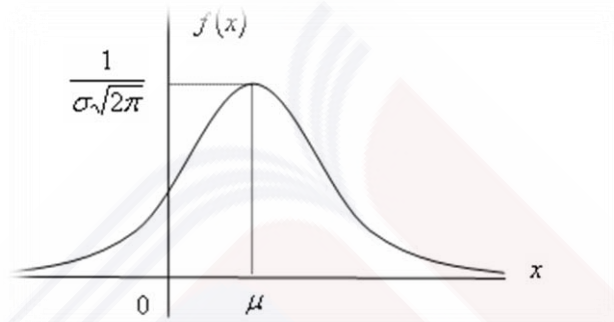
$$f(x) = \frac{1}{\sigma.\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \quad ; -\infty < x < +\infty$$

$$\sigma > 0 \ ; \ -\infty < \mu < +\infty$$

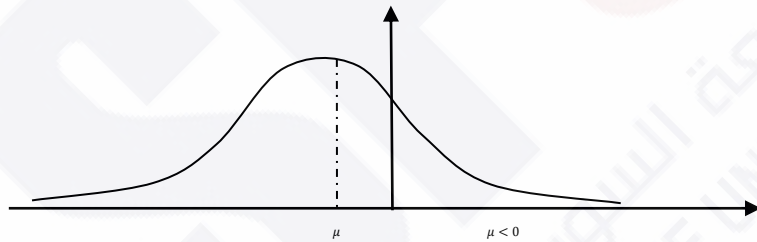
ينتج من تعريف هذه الكثافة :

- أنها تبلغ قيمتها العظمى عند $x = \mu$ وتساوي هذه القيمة العظمى $\frac{1}{\sigma.\sqrt{2\pi}}$.
- المنحني البياني لهذه الكثافة متناظر بالنسبة للمستقيم $x = \mu$
- عندما $x \to \mp\infty$ فإنّ $f(x) = 0$

- لمتوسط ووسط ومنوال التوزيع الطبيعي القيمة نفسها μ
- المنحني البياني لهذه الكثافة له الشكل :



μ>0



- **<u>التوقع الرياضي والتباين :</u>**

$$E(X) = \mu \qquad , \; V(X) = \sigma^2$$

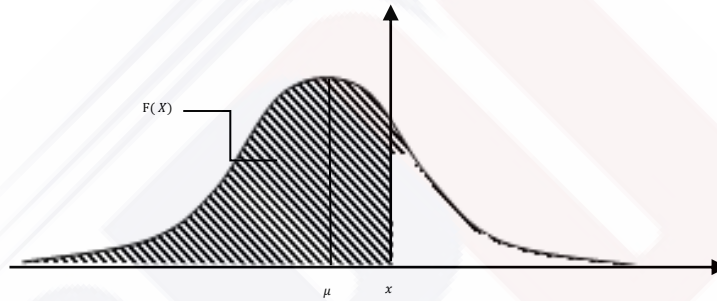
أي أن وسيطي التوزيع الطبيعي μ و σ^2 هما التوقع الرياضي والتباين لـX على الترتيب.

دالة التوزيع :

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{dt} = \frac{1}{\sigma.\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2} dt$$

وهي تساوي القسم المظلل في الشكل الآتي:

وهي تمثل $P(\mathrm{X} \leq x)$



من الواضح $F(\mu) = \frac{1}{2}$ (لماذا ؟)

2.2.6.3 دالة الكثافة ودالة التوزيع المعيارية:

تعريف: نقول إنّ للمتغير العشوائي Z التوزيع الطبيعي المعياري إذا كان $Z \sim N(0,1)$، أي إذا كان لـ Z الكثافة الاحتمالية:

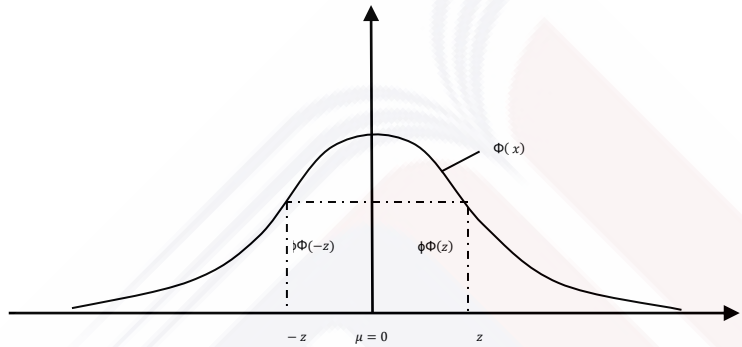
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad ; \; -\infty < x < +\infty$$

ومِنْ ثَمَّ دالة التوزيع:

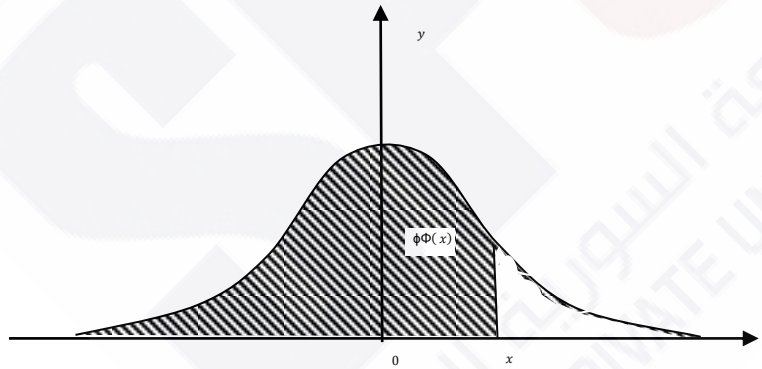
$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

سنرمز لدالة الكثافة الاحتمالية في هذه الحالة بـ $\varphi(x)$ بدلاً من $f(x)$ ولدالة التوزيع بـ $\Phi(x)$ بدلاً $F(x)$.

أي إذا كان $Z \sim N(0,1)$ فإن كثافته $\varphi(x)$ ودالة توزيعه $\Phi(x)$



التمثيل البياني لكثافة التوزيع الطبيعي المعياري(بسبب التناظر)$(\Phi(-z) = 1 - \phi(z))$



منحني كثافة التوزيع الطبيعي المعياري والمساحة المظللة$\phi(z)$

تمثل المساحة المظللة $\Phi(z)$ الاحتمال $P(Z \leq z)$ ومن الواضح أن $\Phi(0)=\frac{1}{2}$

إنّ حساب قيم دالة التوزيع للمتغير الطبيعي المعياري غير ممكنة تحليلاً ، وقد أعدّ جدول يعطي قيم دالة التوزيع $\phi(t)$ من أجل قيم t من عند النقطة $x = 0$ حتى النقطة $x = 3.5$ بفاصل 0.01 بين كل قيمة والقيمة التي تليها.

- **<u>جدول التوزيع الطبيعي المعياري وطريقة استخدامه:</u>**

إنّ هذه الجدول يعطي قيم دالة التوزيع $\Phi(z)$ ابتداءً من الصفر وبفاصل 0.01 بين كل قيمة والقيمة التي تليها . وقد وضعت z ابتداءً من -3.4 وبفاصل 0.1 في العمود الأيسر، ووضعت المنزلة العشرية الثانية من قيمة z في السطر الرأسي، ومقابل كل قيمة في العمود الأيسر هناك سطر يمكن تسميته بهذه القيمة وتحت كل قيمة من قيم المنزلة العشرية الثانية هناك عمود يمكن تسميته بالقيمة التي تقع فوقه. أما قيم المساحات ، أي قيم الدالة $\Phi(z)$ فقد وضعت في صلب الجدول وكل منها ملتقى سطر مع عمود.

مثال (38.3):

إذا كان $Z \sim N(0,1)$ أوجد $P(Z < 2.56)$ و $P(1 < Z < 1.33)$ و $P(Z > 1.84)$ و $P(Z < -1.36)$

الحل :

إنّ $P(Z < 2.56) = \Phi(2.56)$ و باستخدام جدول التوزيع الطبيعي نجد أنّ قيمة $\Phi(z)$ عند ملتقى السطر 2.5 والعمود 0.06 هي 0.9948

بأسلوب مشابه نجد:

$$P(1 < Z < 1.33) = P(Z < 1.33) - P(Z \leq 1) = \Phi(1.33) - \Phi(1) = 0.9082 - 0.8413 = 0.0669$$

وكذلك نجد:

$$P(Z > 1.84) = 1 - P(Z \leq 1.84) = 1 - \phi(1.84)$$

$= 1 - 0.9671 = 0.0329$
$P(Z < -1.36) = \phi(1.36) = 0.0869$

<u>ملاحظة:</u> يمكن استخدام جدول دالة التوزيع الطبيعي بشكل عكسي كما في المثالين الآتيين:

مثال (39.3) :

إذا كان $Z \sim N(0,1)$ وكان لدينا $P(Z < a) = 0.8289$ فإننا نبحث عن القيمة 0.8289 ، وسنجد بأنّ هذه القيمة تقع عند السطر 0.9 والعمود 0.05 ، إذن قيمة a هي 0.95 أي : $a = 0.95$

مثال (40.3) :

إذا كان $Z \sim N(0,1)$ ، أوجد قيمة الثابتين الحقيقيين a و c حيث
$P(Z < a) = 0.5$ و $P(Z < c) = 0.2061$

الحل:

إنّ $P(Z < a) = 0.5$ يعني $\Phi(a)=0.5$ ومِنْ ثَمَّ $a = 0$

أما $P(Z < c) = 0.2061$ يعني أنَّ $\Phi(c) = 0.2061$ ، ولو حاولنا البحث عن القيمة 0.2061 داخل جدول التوزيع الطبيعي المعياري لوجدنا أن:

$$c = -0.82$$

3.2.6.3 <u>مبرهنات مهمّة جداً:</u>

<u>مبرهنة(1):</u>

إذا كان لـ x التوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ فإنه يكون للمتغير العشوائي $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ التوزيع الطبيعي المعياري ، أي:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

ملاحظة:

لقد بَيّنّا في الأمثلة السابقة طريقة إيجاد قيم الدالة $\Phi(z)$ أي الاحتمالات المتعلقة بالمتغير الطبيعي المعياري z والآن لنبين طريقة إيجاد الاحتمالات المتعلقة بالمتغير العشوائي X الذي يتوزع وفق التوزيع الطبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ ولكي نتمكن من حساب الاحتمالات المتعلقة بـ X يجب معرفة قيمتي الوسيطين μ و σ^2 وعند معرفتنا للوسيطين يصبح الأمر في غاية السهولة إذ نقوم بمعايرة X .

أي نكتب : $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

ثم نحوّل العبارة الاحتمالية المتعلقة بـ X إلى عبارة احتمالية مكافئة بدلالة z، ثم نعود إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري الذي تدربنا قبل قليل على طريقة استخدامه.

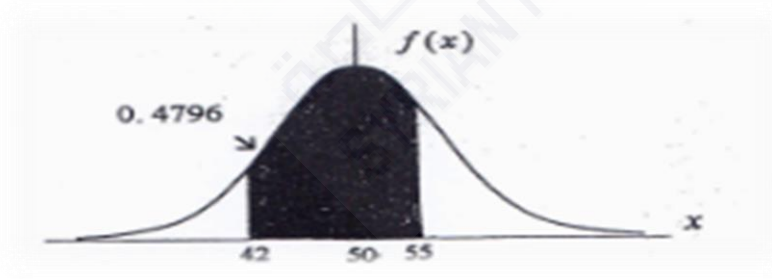
مثال(41.3) :

إذا كان X متغيراً عشوائياً له التوزيع $N(50,100)$. فأوجد قيمة الاحتمال:

$$P[42 < X < 55]$$

الحل:

نقوم بمعايرة المتغير العشوائي X ونفرض $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ثم نعين قيمتي Z المقابلتين للقيمتين $x_1 = 42$ و $x_2 = 55$



$$z_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma} = \frac{42-50}{10} = -0.8$$
$$z_2 = \frac{x_2-\mu}{\sigma} = \frac{55-50}{10} = 0.5$$

ومِنْ ثَمَّ يكون :

$$\mathrm{P}[42 < X < 55] = \mathrm{P}[-0.8 < Z < 0.5]$$
$$= \mathrm{P}[\mathrm{Z} < 0.5] - \mathrm{P}[\mathrm{Z} < -0.8] = 0.6915 - 0.2119 = 0.4796$$

مثال (42.3):

إذا كان X متتغيراً عشوائياً له التوزيع $N(10,16)$ فأوجد قيمة x بحيث يكون $\mathrm{P}[\mathrm{X} < x] = 0.9980$

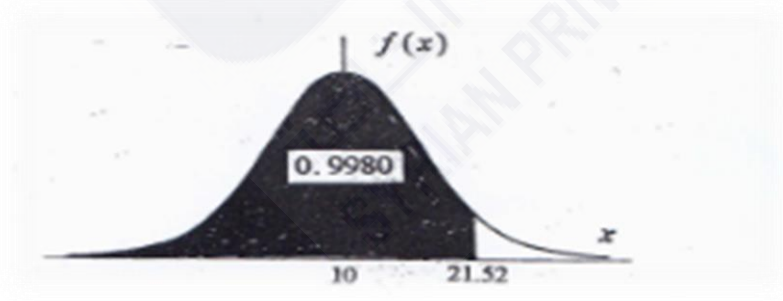
الحل:

نقوم بمعايرة x ونفرض : $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

أما قيمة z الموافقة لـ x فهي : $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

ثم نعين z بحيث يكون : $\mathrm{P}[\mathrm{X} < x] = \mathrm{P}[\mathrm{Z} < z] = 0.9980$

ولوعدنا إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري لوجدنا أن قيمة z الموافقة للقيمة 0.9980 هي $z = 2.88$



ثم نعين x من العلاقة: $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-10}{4} = 2.88$

ومنه نجد : $x = 4(2.88) + 10 = 21.51$

مثال(43.3): إذا كان X متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه $\mu = 40$ وانحرافه المعياري $\sigma = 6$ أوجد قيمة:

1. a التي يقع على يسارها 45% من المساحة تحت منحني تابع الكثافة.
2. b التي يقع على يمينها 14% من المساحة تحت منحني تابع الكثافة.

الحل:

1) لنعين قيمة a بحيث يكون :

$$F(a) = P[X < a] = 0.45$$

وبالتحويل للطبيعي المعياري نجد :

$$P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{\alpha-40}{6}\right] = P[Z < z] = 0.45$$

حيث: $z = \frac{\alpha-40}{6}$

ومن جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد قيمة z الموافقة للقيمة 0.45 هي $z = -0.13$ ومنه فإن :

$$\alpha = 6(z) + 40 = 6(-0.13) + 40 = 39.22$$

2) نعين قيمة b بحيث يكون :

$$P[X > b] = 0.14$$

ومنه :

$$P[X < b] = 1 - 0.14 = 0.86$$

وبالتحويل للطبيعي المعياري نجد :

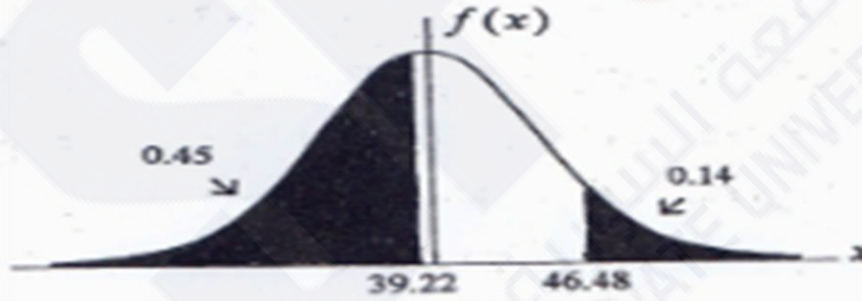
$$\mathrm{P}\left[\frac{\mathrm{X}-\mu}{\sigma} < \frac{\mathrm{b}-40}{6}\right] = \mathrm{P}[\mathrm{Z} < z] = 0.86$$

حيث:

$$z = \frac{b-40}{6}$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد قيمة z الموافقة للقيمة 0.86 هي $z =$ 1.08 ومنه فإن :

$$z = 1.86 = \frac{b-40}{6} \Rightarrow b = 46.48$$



مثال (44.3):

إذا فرضنا أن طول الشخص متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 175\ c.m$ وانحراف معياري $\sigma = 7.5\ c.m$ فكيف يحدد مهندس ارتفاع أبواب الغرف في منزل يقوم بتصميمه بحيث لا يضطر أكثر من 2% من الأشخاص إلى تخفيض رؤوسهم عند الدخول وعند الخروج .

الحل:

إذا دل X على طول الشخص فإن:

$$X \sim N(175,56.25)$$

فإذا فرضنا أن ارتفاع الباب هو $a\ c.m$ فيكون المطلوب تحديد قيمة a بحيث يكون:

$$P(X > a) \leq 0.02$$

ولكن :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > a) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} < a)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{a-175}{7.5}\right) \leq 0.02$$

ومِنْ ثَمَّ نعين a بحيث يكون :

$$\Phi\left(\frac{a-175}{7.5}\right) \geq 0.98$$

ولكن من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد:

$$0.98 = \Phi(2.06)$$

إذن نعين a بحيث يكون : $\Phi\left(\frac{a-175}{7.5}\right) \geq \Phi(2.06)$

$$\Rightarrow \frac{a-175}{7.5} \geq 2.06$$ (Φ دالة متزايدة)

$$\Rightarrow a \geq 190.45\ c.m$$

مثال (45.3):

في بستان للبرتقال متوسط وزن الثمرة 19.3 أونزة بانحراف معياري 2.3 أونزة. مفترضاً أنّ وزن الثمرة متغير عشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي ، احسب:

أ- نسبة الثمار التي يقل وزنها عن *18* أونة.

ب- نسبة الثمار التي لا يقل وزنها عن *20* أونزة.

ت- نسبة الثمار التي يتراوح وزنها بين 18.5 و 20.5 أونزة.

ث- الوزن الذي سيقل عنه 15% من الثمار.

ج- الوزن الذي سيزيد عليه 25% من الثمار.

الحل:

أ- $$P[X < 18] = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{18-19.3}{2.3}\right] = P[Z < \frac{-1.3}{2.3}]$$

$$= P[Z < -0.57] = 0.2843$$

ب- $$P[X \geq 20] = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{20-19.3}{2.3}\right] = P\left[Z \geq \frac{0.7}{2.3}\right]$$

$$= P[Z \geq 0.30]$$

$$= 1 - P[Z < 0.30] = 1 - 0.6179 = 0.3821$$

أي إنّ نسبة الثمار التي لا يقل وزنها عن 20 أونزة 38.21%.

ت-

$$P[18.5 < X < 20.5] = P\left[\frac{18.5-19.3}{2.3} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{20.5-19.3}{2.3}\right]$$

$$= P(-0.35 < Z < 0.52) = P[Z < 0.52] - P[Z < -0.35]$$

$= 0.6985 - 0.3632 = 0.3353$

أي إن نسبة الثمار التي يتراوح وزنها بين 18.5 و 20.5 أونزة هي 33.35%

ث- بفرض أنّ الوزن الذي سيقل عنه 15% من الثمار هو a فيكون:

$$P[X < a] = 0.15 \Rightarrow P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{a-19.3}{2.3}\right] = 0.15$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{a-19.3}{2.3}\right) = 0.15 \Leftrightarrow \frac{a-19.3}{2.3} = -1.04$$

$$a = 19.3 - (2.3)(1.04)$$

$$a = 16.9$$

أي إنّ نسبة الثمار التي يقل وزنها عن 16.908 أونزة تساوي 15% .

ج- بفرض أن الوزن الذي سيزيد عليه 25% من الثمار هو b فيكون:

$$P[X > b] = 0.25 \Leftrightarrow \frac{b-19.3}{\sigma} = 0.67$$

$$b = (2.3)(0.67) + 19.3 = 20.841$$

هذا يعني أن نسبة الثمار التي يزيد وزنها على 20.841 تساوي 25%.

<u>مبرهنة (2):</u> إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة، التي لكل منها التوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ نفسه ، فإنه يكون للمتغير العشوائي :

$$Y_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

التوزيع الطبيعي $N(n\mu, n\sigma^2)$

لاحظ أن $V(Y_1) = n\sigma^2, E(Y_1) = n\mu$

ويكون للمتغير العشوائي $Y_2 = \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ التوزيع الطبيعي $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

ومِنْ ثَمّ فإنه يكون للمتغير العشوائي $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ التوزيع الطبيعي المعياري، ويكون للمتغير العشوائي:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

أي له التوزيع الطبيعي المعياري أيضاً.

<u>تعريف:</u> نسمي كل متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة $X_1, X_2, \dots, X_n$ التي لكل منها دالة التوزيع $F(x)$ نفسه ، عينة عشوائية حجمها n مأخوذة من المجتمع $F(x)$.

(على الطالب فهم هذا التعريف بشكل لا لبس فيه).

مثال(46.3):

بفرض أنّ أوزان الأشخاص الذين يستخدمون مصعداً معيناً تتوزع وفق التوزيع الطبيعي $N(80,100)$، والحد الأعلى المسموح به لحمولة المصعد هو 350 كغ.

أ. بصورة عشوائية يجتمع أربعة أشخاص في المصعد. ما احتمال تجاوز الحمولة القصوى؟

ب. بصورة عشوائية هناك شخص واحد في المصعد ومعه أمتعة تزن ثلاثة أمثال وزنه، ما احتمال تجاوز الحمولة القصوى؟

الحل:

أ. بفرض أنّ أوزان الأشخاص الأربعة هي X_1, X_2, X_3, X_4 فتكون هذه الأوزان مستقلة و $X_i \sim N(80,100)$; $(i=1,2,3,4)$

ويكون الاحتمال المطلوب:

$$P[X_1 + X_2 + X_3 + X_4 > 350] = P(\sum_{i=1}^{4} X_i > 350)$$

ولكن $\sum_{i=1}^{4} X_i \sim N(320,400)$ ، وبالتالي يمكننا أن نكتب:

$$P(\sum_{i=1}^{4} X_i > 350) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{4} X_i - 320}{20} > \frac{350-320}{20}\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{3}{2}\right) = 1 - P(Z \leq 1.5) = 1 - \Phi(1.5)$$

$$= 1 - 0.9332 = 0.0668$$

ب. إذا رمزنا لوزن الشخص بـ X فيكون وزن الأمتعة $3X$ ، ويكون الاحتمال المطلوب:

$$P(4X > 350) = P(X > 87.5) = P\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X} > \frac{87.5-80}{10}\right)$$

$$= P(Z > 0.75) = 1 - \Phi(0.75) = 1 - 0.7734 = 0.2266$$

مثال(47.3):

في عيادة أحد الأطباء عشرون مراجعاً، وقد بدأ باستقبالهم في الخامسة مساءً. ففي أي ساعة سيكون واثقاً 99% بأنه سينتهي عمله، إذا كان يعلم من خبرته السابقة أن أزمنة مقابلة المرضى تتوزع توزعاً طبيعياً بتوقع $\mu = 10$ دقيقة وبانحراف معياري 3 دقائق.

الحل: ليكن X المتغير الدال على أزمنة مقابلة المرضى عندئذ :

$X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 9)$ ومن أجل $n = 20$ مريضاً فإن :

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2) = N\big((20)(10); (20)(9)\big)$$

$$Y \sim N(200,180)$$

فلحساب الزمن y اللازم لمقابلة 20 مريضاً وبثقة 0.99 يحتسب:

$$p[Y \le y] = 0.99 \Rightarrow P\left[\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y} \le \frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right] = 0.99$$

$$\Rightarrow p\left[Z \le \frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right] = 0.99 \Rightarrow \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} = 2.33 \ (\text{من الجدول})$$

$$y = (2.33)(\sigma_y) + \mu_y = (2.33)(\sqrt{180}) + 200 = 231.23 \ \text{دقيقة}$$

أي يلزمه 231.23 دقيقة وهذا يساوي : 3 ساعات و 51 دقيقة ، وستكون نهاية العمل في الساعة:

$$(\text{الساعة الخامسة}) + (3 \ \text{ساعات}) + (51 \ \text{دقيقة}) = (\text{الساعة } 8) + (51 \ \text{دقيقة})$$

4.6.3 القاعدة التجريبية (قاعدة الـ σ 3) :

نبيّن من خلال المبرهنة الآتية ما يعنيه الانحراف المعياري σ للتوزيع الطبيعي.

مبرهنة (3): إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإنّ:

(1 $P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) = 0.6826$

أي إن نسبة القياسات الواقعة داخل المجال $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ لا تقل عن 68.28% (يجب توضيح ذلك بشكل دقيق للطلاب من خلال الأمثلة).

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544 \qquad \textbf{(2}$$

أي إن نسبة القياسات الواقعة داخل المجال $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ لا تقل عن 95.44%

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9974 \qquad \textbf{(3}$$

أي إن نسبة القياسات الواقعة داخل المجال $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ لا تقل عن 0.9974%

- **الإثبات:**

1) إثبات (1):

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P\left(-1 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq +1\right)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq +1)$$

$$= P(Z \leq +1) - P(Z < -1) = \phi(+1) - \phi(-1)$$

$$= \Phi(+1) - [1 - \Phi(1)] = 2\Phi(1) - 1 = 2(0.8413) - 1$$

$$= 1.6826 - 1 = 0.6826$$

وبالأسلوب نفسه نثبت صحة (2) و(3) . (يترك ذلك تمريناً للقارئ).

إنّ استخدام مضمون هذه المبرهنة يصدر لنا قاعدة تجريبية لتحديد كون قياسات المجتمع المدروس (من خلال القيم التي يأخذها متغير عشوائي ما) هي من مجتمع طبيعي أم لا . لأجل ذلك نعد قيم هذا المجتمع هي قيم لمتغير عشوائي X متوسطه μ وتباينه σ^2 مجهولان ، ثم نحسب متوسط هذه القيم ، وليكن $\bar{x}$

والانحراف المعياري لهذه القيم وليكن s (نعد $\bar{x}$ قيمة تقريبية لـ μ ونعد s قيمة تقريبية لـ σ ثم نحسب نسبة القياسات الواقعة ضمن المجالات:

$$[\bar{x} - s, \bar{x} + s]$$

و $$[\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s]$$

و $$[\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s]$$

ونقارن هذه النسب مع النسب المعطاة في هذه المبرهنة، فإذا كانت قريبة منها بشكل مقبول قلنا : إنّ هذا المجتمع الذي أخذت منه القياسات هو مجتمع طبيعي متوسطه $\mu = \bar{x}$ وتباينه $\sigma^2 = s^2$ وتسمى القاعدة السابقة (اختبار كون المجتمع طبيعياً) بقاعدة الـ 3σ .

ملاحظة (2):

إنّ المبرهنة السابقة تعني أنّ نسبة القياسات الواقعة خارج المجال $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ هي 0.26% ، مما يعني أن نسبة القياسات التي تزيد على $\mu + 3\sigma$ هي 0.13% وأنّ نسبة القياسات التي تقل عن $\mu - 3\sigma$ هي 0.13%، وذلك بسبب تناظر منحني الكثافة الطبيعية حول المستقيم $x = \mu$.

ولو تأملنا في جدول التوزيع الطبيعي المعياري لوجدنا $\phi(3.49) = 0.9998$ بما أنّ الدالة $\Phi(z)$ متزايدة (لماذا ؟) ، فهذا يسمح لنا ، ولو بشكل تقريبي عدّ قيم $\Phi(z) = 1$ من أجل جميع قيم $z \geq 3.60$ ، وكذلك $\Phi(z) = 0$ من أجل جميع قيم $z \leq 3.60$

5.6.3 مبرهنات النهايات الحدية:

وجدنا من خلال المبرهنة (2) أنّه إذا كانت لدينا عينة عشوائية $X_1, X_2, \dots, X_n$ من المجتمع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ ، فإنّ المتغير العشوائي (مجموع عناصر هذه العينة) له التوزيع الطبيعي $N(n\mu, n\sigma^2)$ ومِنْ ثَمّ يكون للمتغير العشوائي $Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ التوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$.

وكذلك فإنّه يكون للمتغير العشوائي $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ (المتوسط الحسابي لعناصر العينة) التوزيع الطبيعي $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ ، ومِنْ ثَمّ يكون للمتغير العشوائي $Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ التوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$ وذلك بصرف النظر عن قيمة حجم العينة n .

ولحسن الحظ إنّ ما سبق ذكره يبقى صحيحاً من أجل أي عينة عشوائية $X_1, X_2, \dots, X_n$ مأخوذة من أي مجتمع ، بشرط أن يكون حجم العينة n كبيراً بالقدر الكافي، وهذه ما تفيد به مبرهنة النهاية المركزية التي سنقبلها دون برهان.

مبرهنة (4):مبرهنة النهاية المركزية:

إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة من مجتمع $F(t)$ متوسطه μ وتباينه σ^2 $(\sigma^2 \neq 0)$، فإنّ توزيع المتغير العشوائي $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ يتقارب من التوزيع الطبيعي $N(n\mu, n\sigma^2)$.

كذلك الأمر فإنّ توزيع $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ يتقرب من التوزيع الطبيعي $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ ونتيجة لهذه المبرهنة ، فإنّ توزيع :

- $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ يتقارب من التوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$.

- $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ يتقارب من التوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$.

وذلك من أجل قيم n الكبيرة.

تبيّن هذه المبرهنة مدى نزوع مجموع عناصر عينة إلى التوزيع الطبيعي. والسؤال الذي يطرح نفسه هو : كم يجب أن يكون حجم العينة n حتى يصبح التقريب الناشئ عن تطبيق هذه المبرهنة تقريباً جدياً من وجهة النظر العملية.

لسوء الحظ لا يوجد جواب عام ومحدد تماماً لهذه السؤال، ويتعلق الأمر بالمجتمع المأخوذ منه العينة. فكلما كانت درجة التناظر كبيرة في توزيع المجتمع المأخوذ منه العينة كان التقريب جيداً أكثر. ويُلحظ أنّه من أجل $n \geq 30$ ، فإنّ التقريب يكون جيداً، وذلك مهما يكن المجتمع المأخوذ منه العينة.

مثال(48.3):

إذا كان $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة التي لكل منها التوزيع البواسوني بوسيط $\lambda = 2$

فإذا كان : $Y_{100} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$

فأوجد: $P(190 < Y_{100} < 210)$

الحل:

من المبرهنة 5 نعلم أن :

$$E(X_i) = V(X_i) = \lambda = 2 \qquad (i = 1,2, \ldots.)$$

وحسب مبرهنة النهاية المركزية فإن المتغير العشوائي Y_{100} تقريباً التوزيع:

$N(100\mu, 100\sigma^2)$ أي التوزيع $N(200,200)$

ويكون : $P(190 < Y_{100} < 210)$

$$= P\left(\frac{190-200}{10\sqrt{2}} < \frac{190-200}{10\sqrt{2}} < \frac{200-210}{10\sqrt{2}}\right)$$

$$= P(-0.707 < Z < 0.707) = 2\phi(0.707) - 1 \cong 0.52$$

6.6.3 تقريب التوزيع الثنائي بالتوزيع الطبيعي:

قمنا فيما سبق بعدة تطبيقات للتوزيع الثنائي اقتضت جميعها حساب احتمال أن يأخذ X وهو عدد النجاحات من بين n تكراراً ، قيمة معينة أو أن يقع ضمن مجال معين ، وقد اقتصرنا التطبيقات على أمثلة تكون n صغيرة ، وذلك بسبب مشقة الحسابات عندما n كبيرة وتقدم ، مبرهنة النهاية المركزية حلاً لهذه المشكلة، ذلك لأنه يمكن النظر إلى عدد النجاحات X عند تكرار التجربة البرنولية n تكراراً مستقلاً على أنه مجموع لـ n متغيراً مستقلا ولكل منها التوزيع البرنولي بوسيط p.

وهكذا نلحظ أنه إذا كان X متغيراً عشوائياً له التوزيع الثنائي بوسيطين n و p فإن : $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

حيث $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية برنولية لكل منها الوسيط p ووفقاً لنظرية النهاية المركزية يكون التوزيع التقريبي لـ x في حالة n كبيرة كفاية التوزيع الطبيعي بمتوسط np وتباين npq . وهكذا يمكننا من جديد استخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري لحساب احتمالات تتعلق بالمتغير العشوائي الحداني، ولكن بصورة تقريبية والقاعدة العملية لهذا التقريب تقتضي بأن يتحقق الشرطان الآتيان:

$$nq \geq 5 \quad , \quad np \geq 5$$

وعندها يكون :

$$P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 - \frac{1}{2} \le Y \le x_2 + \frac{1}{2})$$

حيث :

$$Y \sim N(np, npq)$$

وقد قمنا بتعديل طرفي مجال تحولات Y لأننا نقوم بتقريب توزيع منفصل بتوزيع مستمر والتعديل الذي أجريناه تبين أنه يحسن التقريب كثيراً وتسمى إضافة أو طرح $\frac{1}{2}$ عملية تصحيح من أجل الاستمرار.

مثال(49.3):

تم اختبار لقاحٍ جديدٍ ضد الزكام ، وقد أعطي اللقاح لمئة شخص ، وتم مراقبتهم من جهة إصابتهم بالزكام لمدة عام ، ولقد نجا 68 منهم من الإصابة بالزكام، ولنفترض أننا نعلم من معلومات سابقة أن احتمال عدم الإصابة بالزكام هو بصورة طبيعية وبدون استخدام اللقاح 0.50 والمطلوب:

أيّ نتائج يمكن استخلاصها من هذه التجربة حول فعالية اللقاح؟

الحل:

لنحسب احتمال نجاة 68 أو أكثر من الإصابة بالزكام تحت الفرض أن $P = 0.5$

فإذا كان X المتغير الدال على عدد الذين نجوا من الإصابة بالزكام خلال العام عندئذ:

$$X \sim b\left(n = 100; p = \frac{1}{2}\right) \approx N(\mu = np; \sigma^2 = npq)$$

حيث:

$$\mu = np = (100)\left(\frac{1}{2}\right) = 50$$

$$\sigma^2 = npq = (100)\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right) = 25$$

ومنه :

$$X \sim N(\mu = 50; \sigma^2 = 25)$$

$$P[X \geq 68] = P[X \geq 68 - 0.5] = P[X \geq 67.5]$$

$$P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{67.5-\mu}{\sigma}\right] = P[Z \geq \frac{67.5-50}{5}]$$

$$= P[Z \geq 3.5] = 1 - P[Z \leq 3.5] = 1 - 0.9998 = 0.0002$$

النتيجة تدل على الاعتراف بفعالية اللقاح في الوقاية من الزكام.

مثال(50.3): تدعي شركة لصنع الأدوية بأن أحد الأدوية التي تنتجها تؤدي إلى شفاء 80% من المرضى الذين يعالجون به ، ولاختيار هذا الادعاء أخذت عينة من 100 مريض ، وعولجوا بهذا الدواء ، واتخذ القرار بقبول هذا الادعاء إذا شفي منهم 75 مريضاً أو أكثر.

والمطلوب:

1. ما احتمال رفض ادعاء الشركة إذا كان احتمال الشفاء باستخدام هذا الدواء هو 0.80 فعلاً؟
2. ما احتمال قبول ادعاء الشركة إذا كان احتمال الشفاء لا يتجاوز 0.70 ؟

الحل:

النموذج المدروس يتبع التوزيع الثنائي كون التجربة ثنائية (شفاء أو عدم شفاء) ومكررة تكراراً مستقلاً n=100 مرة.

وإذا كان X عدد المرضى الذين تم شفاؤهم نتيجة استخدام هذا الدواء فإن:

الطلب (1):

$$X \sim b(n = 100; P = 0.80) \approx N(\mu = np; \sigma^2 = npq)$$

$$\mu = np = (100)(0.80) = 80$$

$$\sigma^2 = npq = (100)(0.80).(0.2) = 16$$

ومنه :

$$X \approx N(\mu = 80; \sigma^2 = 16)$$

حيث تم اعتماد التقريب الطبيعي للتوزيع الثنائي لأن n كبيرة.

$$P[X < 75] = P[X < 74.5] = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{74.5-80}{4}\right]$$

$$= P[Z < -1.38] = 0.0853$$

وهو احتمال رفض ادعاء الشركة.

الطلب (2): من أجل قبول ادعاء الشركة يجب أن نحسب:

$$\mu = np = (100)(0.7) = 70$$

$$\sigma^2 = npq = (100)(0.70).(0.30) = 21$$

$$\sigma = \sqrt{21} = 4.58$$

$$P[X \geq 75] = P[X \geq 74.5] = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{74.5-70}{4.58}\right]$$

$$= P[Z \geq -0.982] = 1 - P[Z \leq 0.982]$$

$$= 1 - 0.8365 = 0.1635$$

وهو احتمال قبول ادعاء الشركة.

7.3 تمارين غير محلولة (للقسم العملي):

1. تدل الإحصائيات الطبية على أنه 40% من المدخنين يصابون بسرطان الرئة. فما احتمال أن يصاب 4 من المرضى من 10 أشخاص ؟ وما احتمال إصابة 3 على الأقل؟

2. منطقة ريفية يعتقد بأنّ 60% من منازلها مؤمن ضد الحريق ، اختير أربعة مالكي منازل ريفية من المنطقة عشوائياً وقد أمن X منهم ضد الحريق ، اكتب جدول التوزيع الاحتمالي لـ X.

وما احتمال أن يكون ثلاثة منهم على الأقل قد أمنوا بيوتهم ضد الحريق؟

3. لنفترض أن المحركات الأربعة لطائرة تجارية مصممة بحيث تعمل مستقلة عن بعضها عن بعض ، واحتمال عطل أي منها والطائرة في الجو هو 0.01 .
والمطلوب: ما احتمال

1. ألا يقع أي عطل ؟ 2. ألا يقع أكثر من عطل؟

4. في مصنع للأدوية ينتج أكياس مصل معين، إذا كان 20% من إنتاجه من هذه الأكياس معيب الصنع ، فاحسب احتمال أن يكون هناك أربعة أكياس معيبة الصنع في عينة من 100 كيس . ثم احسب احتمال أن يكون هناك كيس على الأقل معيب الصنع ضمن العينة المدروسة.

5. تقع حوادث اصطدام الطرق في منطقة معينة بمعدل حادث واحد لكل يومين.
والمطلوب:

أ- احسب الاحتمالات الموافقة لـ 0 ، 1، 2 ، 3، 4، 5، 6. حوادث اصطدام في الأسبوع في تلك المنطقة.

ب- ما عدد الاصطدامات الأسبوعية الأكثر احتمالاً؟

ت-كم يوماً في الأسبوع نتوقع أن يمر دون اصطدامات.

$(\mu = 7 \times \frac{1}{2} = 3.5)$؟

6. إذا كانت نسبة الأشخاص الذين يتوفون بسبب نوع معين من المرض هو 0.002 وكان عدد الذين أمنوا على حياتهم ضد هذا النوع من المرض هو 1000 شخص. وبفرض X يمثل عدد الأشخاص الذين يتوفون بسبب هذا المرض. والمطلوب:

أ- أوجد احتمال ألا تدفع شركة التأمين لأي منهم.

ب-أوجد احتمال أن تدفع الشركة لعدد يتراوح بين شخص واحد وثلاثة أشخاص.

ت-ما العدد المتوقع الذي ستدفعه شركة التأمين لهؤلاء الأشخاص؟

7. إذا كان معدل عدد حوادث المرور في مدينة معينة خلال يوم ماطر هو 3 حوادث. والمطلوب:

أ- ما احتمال وقوع حادث واحد فقط في هذه المدينة خلال يوم ماطر؟

ب- ما احتمال وقوع ثلاثة حوادث على الأكثر في هذه المدينة خلال يوم ماطر؟

8. إذا كان طول الشخص عبارة عن متغير عشوائي X له التوزيع الطبيعي

$N(\mu = 175, \sigma^2 = (7.5)^2)$ فكيف يحدد مهندس ارتفاع أبواب الغرف في منزل يقوم بتصميمه بحيث لا يضطر أكثر من 5% من الأشخاص إلى تخفيض رؤوسهم عند الدخول أو الخروج.

9. إذا كان احتمال أن يصاب مريض القلب بأزمة قلبية أثناء المعالجة هو 0.2 فإذا كان لدينا 10 مرضى يعانون الظروف الصحية نفسها فالمطلوب:

أ- ما احتمال إصابة 6 مرضى بأزمة قلبية أثناء العلاج؟

ب- ما العدد المتوقع من هؤلاء المرضى أن يصاب بأزمة قلبية أثناء العلاج؟

10. إذا كانت أعمار أحدث المصابيح تتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي 5 سنوات وانحراف معياري يساوي سنة واحدة.

احسب احتمال أن يقع متوسط عينة حجمها n=9 من هذه المصابيح في المجال [4.4, 5.2]

11. بافتراض أن احتمال الحصول على طفل أزرق العينين هو $\frac{1}{3}$ ، فإذا كان في الأسرة 6 أطفال . المطلوب:

أ- ما احتمال عدم الحصول على طفل أزرق العينين؟

ب- ما احتمال أن نصف الأطفال ذوو عيون زرقاء؟

ت- ما احتمال الحصول على طفل واحد على الأقل ذي عيون زرقاء؟

ث- ما العدد المتوقع للحصول على أطفال ذوي عيون زرقاء؟

12. إذا كان احتمال وجود شخص يستخدم يده اليسرى في الكتابة في مجتمع ما هو 0.02 تم اختيار عينة عشوائية من الحجم 500 شخصٍ من ذلك المجتمع فالمطلوب:

أ- احسب احتمال وجود ثلاثة أشخاص على الأقل من هؤلاء الأشخاص في العينة المسحوبة يستخدمون اليد اليسرى في الكتابة.

ب- ما العدد المتوقع والتباين من هؤلاء الأشخاص في العينة المسحوبة للذين يستخدمون اليد اليسرى في الكتابة؟

13. إن معدل أطوال طلاب جامعة دمشق هو 165 $c.m$ وبانحراف معياري قدره 8 $c.m$ والمطلوب: ما نسبة الطلاب الذين تتجاوز أطوالهم 175 $c.m$؟

14. إن درجات 300 طالب نجحوا في امتحان مقرر الإحصاء الحيوي كانت تتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 65 وبانحراف معياري 10 والمطلوب:

أ- ما عدد الطلاب الذين وقعت درجاتهم بين 70 و 80 درجة.

ب- ما أقل علامة حصل عليها طالب من الـ 12% الأوائل ؟ وما أعلى علامة حصل عليها طالب من المجموعة الباقية؟

15. في عيادة أحد الأطباء 15 مريضاً، وقد بدأ باستقبالهم في الرابعة مساءً ، ففي أي ساعة سيكون واثقاً 95% بأنه سينتهي عمله إذا كان يعلم من خبرته السابقة أن أزمنة مقابلة المرضى تتوزع توزعاً طبيعياً بتوقع $\mu = 12$ دقيقة وبانحراف معياري 4 دقائق.